RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 febbraio 1911.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica-Matematica. — *Sopra un particolare fenomeno di diffusione.* Nota del Corrispondente ANTONIO GARBASSO.

1. La *concentrazione* c della sostanza che diffonde è nulla da principio in tutto lo spazio; al tempo $t = -\theta/2$ essa prende sopra un piano ($x = 0$) il valore K, e lo conserva fino all'istante $t = \theta/2$, per ridursi poi di nuovo e rimanere durevolmente allo zero.

Per ogni valore di x e di t la c sarà data, come è facile verificare, da

$$c = \frac{2K}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2k\sqrt{t+\theta/2}}}^{\frac{x}{2k\sqrt{t-\theta/2}}} e^{-u^2}\, du \,, \tag{1}$$

essendo k il *coefficiente di diffusione*, nella equazione di Fourier

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \,. \tag{2}$$

Se t è grande, così grande che $(\theta/t)^2$ sia trascurabile davanti all'unità, la (1) fornisce

$$c = \frac{2K\theta}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{\frac{x}{2k\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2}\, du \,,$$

o, che fa lo stesso,

$$(1') \qquad c = \frac{K\theta x}{2k\sqrt{\pi}\, t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4k^2 t}}.$$

2. Per acquistare un'idea del modo in cui il fenomeno procede, ci domandiamo anzitutto come sia distribuita la concentrazione, ad un dato istante, nel semispazio positivo. Si riconosce subito che

a) per ogni $t(>\theta/2)$ è

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=0} > 0,$$

b) per ogni $t(>\theta/2)$ e per x abbastanza grande è

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right) < 0,$$

c) per ogni valore τ $(>\theta/2)$ del tempo vi è un piano, $x = \xi$, nel quale la c è massima. È determinato dalla

$$(3) \qquad \frac{\theta \xi^2}{2k^2(\tau^2 - \theta^2/4)} = \log(\tau + \theta/2) - \log(\tau - \theta/2).$$

Se τ è grande la (3) fornisce

$$(3') \qquad \tau = \frac{\xi^2}{2k^2},$$

la quale equazione si potrebbe ottenere anche direttamente dalla (1').

La figura 1, dove si sono prese come ascisse le x, e come coordinate le c, rappresenta graficamente la curva $t = costante$, per valori opportuni delle costanti, e per quattro istanti successivi.

3. La discussione fatta nel paragrafo precedente si può riprendere da un altro punto di vista, notando che il massimo, la cui posizione è determinata dalla (3) si sposta al crescere di τ nel verso positivo.

Un piano parallelo ad $x = 0$ viene forato così per qualche tempo dal ramo discendente della $t = costante$, e da ultimo invece dal ramo ascendente.

In altri termini, sopra ogni piano della famiglia la sostanza che diffonde va da principio nel verso positivo, e alla fine del processo nel negativo.

L'istante τ definito dalle (3) e (3') è quello in cui il movimento si inverte.

A scanso di equivoci indicheremo nel seguito τ appunto come il *tempo dell'inversione* per il piano $x = \xi$, e la concentrazione $\gamma = c(\xi, \tau)$ come la *concentrazione d'inversione* per il piano medesimo.

Dalle (1′) e (3′) risulta

$$\gamma = \mathrm{K}k^2 \sqrt{\frac{2}{\pi e}} \cdot \frac{\theta}{\xi^2}, \tag{4}$$

e cioè *la concentrazione d'inversione è, nei piani lontani, proporzionale direttamente all'intervallo* θ, *e inversamente al quadrato della distanza.*

4. Cerchiamo adesso come in un piano della famiglia $x = costante$ varii la c al variare del tempo.

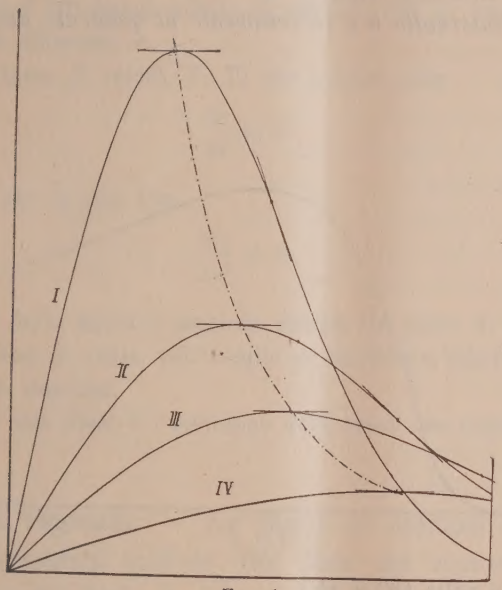


Fig. 1.

È facile vedere che

a) per ogni $x\,(>0)$ la c cresce da principio e da ultimo diminuisce;

b) per ogni valore $\mathrm{X}\,(>0)$ della x vi è un istante (T), in cui la concentrazione è massima. È determinato dalla

$$\frac{\theta \mathrm{X}^2}{6k^2(\mathrm{T}^2 - \theta^2/4)} = \log(\mathrm{T} + \theta/2) - \log(\mathrm{T} - \theta/2). \tag{5}$$

Se T è grande la (5) fornisce

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{X}^2}{6k^2}, \tag{5′}$$

equazione che risulta anche immediatamente dalla (1′).

La figura 2, nella quale si sono prese come ascisse i tempi e come ordinate le c, rappresenta graficamente la curva $x = costante$, per valori opportuni delle costanti, e per un piano determinato.

L'istante T definito dalle (5) e (5′) si chiamerà il *tempo del massimo* per il piano $x = X$, e la concentrazione $C = c(X, T)$ la *concentrazione massima* per il detto piano.

Dalle (1′) e (5′) si ricava

$$C = Kk^2 \sqrt{\frac{2}{\pi e}} \frac{3\sqrt{3}}{e} \cdot \frac{\theta}{X^2}; \tag{6}$$

anche *la concentrazione massima è, nei piani lontani, proporzionale direttamente all'intervallo* θ *e inversamente al quadrato della* x.

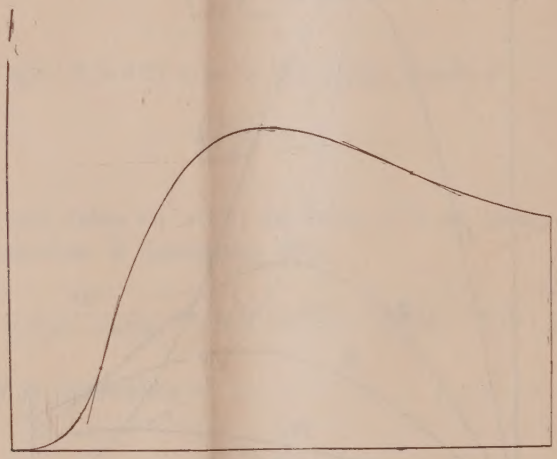


Fig. 2.

5. Facendo nelle (3′) e (5′)

$$\tau = T,$$

viene di conseguenza

$$\xi = \frac{X}{\sqrt{3}}. \tag{7}$$

Mentre un dato piano raggiunge la concentrazione massima, il moto della materia diffondente si inverte sopra un altro piano, la cui distanza dall'origine sta a quella del primo come 1 *a* $\sqrt{3}$.

Ponendo invece, sempre nelle (3′) e (5′),

$$\xi = X,$$

risulta

$$\tau = 3T. \tag{8}$$

Il tempo dell'inversione e il tempo del massimo stanno fra loro, in un medesimo piano, come 3 *ad* 1.

Finalmente, dalle (4) e (6), posto

$$\xi = X,$$

si ricava

$$\frac{C}{\gamma} = \frac{3\sqrt{3}}{e} = 1{,}91. \tag{9}$$

La concentrazione massima e la concentrazione di inversione stanno, per un dato piano, nel rapporto di 1,91 *ad* 1.

Le (7), (8) e (9) hanno questo di notevole, che in esse non compare il coefficiente di diffusione k.

§ 6. Un sistema di valori (X, T) che soddisfa alla

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0,$$

soddisfa anche, per la (2), alla

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0.$$

Ogni curva della figura 1 possiede dunque un punto di flesso, che ha la x di quel piano, il quale, nell'istante cui la curva si riferisce, raggiunge la concentrazione massima.

Il luogo di tali flessi è l'inviluppo delle linee $t =$ *costante*.

Patologia vegetale. — *La Morìa dei castagni (mal dell'inchiostro). Osservazioni critiche alla Nota dei signori Griffon e Maublanc.* Nota del Socio G. Briosi e di R. Farneti.

I signori Griffon e Maublanc pubblicano nei «Comptes rendus de l'Academie des Sciences» (1) una Nota dal titolo: *Sur une maladie des perches de Châtaignier*. In essa gli Autori dichiarano che la malattia dei castagni, da noi descritta in due Note pubblicate negli Atti dell'Istituto botanico di Pavia (2), è identica a quella che essi hanno osservato in Francia nelle pollonete del Limousin.

I signori Griffon e Maublanc limitano i loro studî ai cedui e non fanno menzione dei castagni d'alto fusto, i quali pure, come noi abbiamo dimostrato, sono attaccati dalla stessa malattia che li uccide.

(1) Paris, Dicembre 1910, pagg. 1149-1151.

(2) Briosi e Farneti, *Sulla morìa dei castagni (mal dell'inchiostro)*. Prima Nota. Atti dell'Ist. Bot. dell'Università di Pavia, ser. II, vol. XIII. Milano, 1907.

Id. id., *Intorno alla causa della morìa dei castagni (mal dell'inchiostro) ed ai mezzi per combatterla*. Seconda Nota. Atti dell'Istit. Bot. dell'Università di Pavia, ser. II, vol. XIV. Milano 1909.

I signori Griffon e Maublanc accertano sui rami delle piante malate quanto noi avevamo osservato, cioè la presenza di cancri caratteristici e, nella corteccia di questi, la costante presenza di un micelio che fruttifica alla superficie della medesima, sotto le forme di un *Coryneum* e di una *Melanconis*; forme che riconoscono identiche a quelle che noi avevamo descritte e che essi stessi hanno potuto osservare sopra il materiale che, dietro loro richiesta, noi avevamo loro inviato.

Gli scienziati francesi, per verità, non si addentrano di molto nell'esame della malattia, e sorvolano sopra le molte cose illustrate nelle nostre pubblicazioni, limitandosi ad affermare che il nostro *Coryneum perniciosum* non è altro che il *Corineum Kunzei* var. *Castaneae* Sacc., e che la nostra *Melanconis perniciosa* è identica alla *Melanconis modonia* del Tulasne.

Intorno a questa pubblicazione noi abbiamo le seguenti osservazioni a fare.

Prima di tutto, i signori Griffon e Maublanc non hanno avvertito una delle parti più importanti, l'essenziale forse del nostro lavoro, la quale consiste non tanto nell'avere indicato un nuovo parassita del castagno, quanto nell'avere dimostrato come questa malattia non si inizii nelle estremità delle radici (ove sonvi le micorize) e da qui proceda verso il tronco, ma invece segua la via inversa; e ciò in opposizione a quanto sino ad ora si era ritenuto.

Questo fatto di capitale importanza, fa cadere tutte le teorie che si sono sin qui escogitate, tanto in Italia che fuori; inoltre, indica quale via si debba seguire nella cura profilattica e terapeutica del male.

Il modo di procedere della infezione è di tale importanza, specie per le possibili cure, che la questione del parassitismo passa in seconda linea.

In quanto all'affermazione dei signori Griffon e Maublanc, che il nostro *Coryneum perniciosum* e la nostra *Melanconis perniciosa* altro non siano che il *Corineum Kunzei* var. *Castaneae* del Saccardo e la *Melanconis modonia* del Tulasne, noi, avanti tutto, osserviamo che nella nostra prima pubblicazione, parlando del fungo trovato nella corteccia cancrenosa, dicevamo: « esso è un *Coryneum* molto affine, se non identico, al *Coryneum Kunzei* var. *Castaneae* Sacc. »; e dopo avere parlato dei caratteri differenziali concludevamo: « Per tali ragioni, alle quali va aggiunto il fatto che il micete della Toscana si presenta come un vero parassita, riteniamo doversi esso tenere distinto da quello della Libert, almeno provvisoriamente ».

Quindi a noi non erano sfuggite le affinità dalle quali i signori Griffon e Maublanc credono di poter dedurre l'identità delle due specie.

Inoltre, sino d'allora dimostravamo di non dare soverchia importanza alla designazione e distinzione sistematica del nostro micete, essendo essa, a parer nostro, una cosa secondaria rispetto alla patogenesi della malattia.

Questo premesso, veniamo alla questione fatta dai signori Griffon e Maublanc sulla identità del nostro fungo con altra specie, già nota. Ebbene, noi,

anche dopo la pubblicazione dei due patologi francesi riteniamo ancora che si debba tenere distinto, almeno provvisoriamente, il *Coryneum perniciosum* dal *Coryneum Kunzei* var. *Castaneae* Sacc., e la *Melanconis perniciosa* dalla *Melanconis modonia* Tul., sia per le ragioni esposte nella nostra prima Nota, sia per quelle che qui sotto ci facciamo ad esporre.

Tulasne, dopo aver descritto la forma conidica della *Melanconis modonia* e d'averne constatato le affinità coi generi *Melanconium* Link., *Stilbospora* Pers., *Coryneum* Nees, *Steganosporium* Corda, resta indeciso a quale di questi generi riferirla.

Saccardo, che ha fissato con precisione i caratteri distintivi di questi generi, riferisce la forma conidica della *Melanconis modonia* Tul. al genere *Stilbospora* Pers., denominandola *Stilbospora modonia* Sacc. (*Syll.* III, pag. 772); Fuck. *Symb. myc.*, (pag. 189); Allescher (loc. cit., pag. 636).

Ora, perchè il *Coryneum Kunzei* var. *Castaneae* Sacc. fosse da ritenersi quale forma conidica della *Melanconis modonia* Tul., bisognerebbe che esso fosse identico alla *Stilbospora modonia* Sacc.; ma è possibile che un micologo quale è il Saccardo abbia fatto di una sol cosa due specie diverse, riferendole per di più a due generi differenti?

Il riferimento fatto dal Saccardo della forma conidica della *Melanconis modonia* Tul., secondo le descrizioni del Tulasne e del Fuckel è d'altra parte perfettamente giustificato.

Tulasne dice infatti: « Simul atque maturescunt, haec conidia in pulverem fusco-atrum solvuntur, matricenque, jove pluvioso foedant »; e Fuckel aggiunge: « acervulis majusculis, subcorticis epidermide nidulantibus, demum erumpentibus ».

***

Tra i funghi dell'erbario della signora Libert studiati da C. Roumeguère con la collaborazione del nostro Spegazzini, furono trovati esemplari portanti il nome di *Steganosporium Castaneae* Lib. (inedito), che il Roumeguère identificò e pubblicò sotto il nome di *Coryneum Kunzei* Corda (sin. *Steganosporium castaneae* Lib.) nella *Revisio Reliquiae Libertianae*, Pars I Revue mycologique, 1880, pag. 17), e nei *Fungi selecti gallici exsiccati*, n. 634.

Il Saccardo parimenti riferisce il fungo delle *Reliq. myc.* Lib. IV, n. 180, al *Coryneum Kunzei* Corda, distinguendolo unicamente come varietà sotto il nome di *Coryneum Kunzei* var. *Castaneae* Sacc. (sin. *Steganosporium Castaneae* Lib.).

Ora i signori Griffon e Maublanc asseriscono che il *Coryneum Kunzei* var. *Castaneae* Sacc. ed implicitamente anche il *Coryneum Kunzei* del Roumeguère (« Revisio reliquiae Libertianae » e « Fungi selecti gallici exsiccati », n. 634) non hanno nulla a che vedere col *Coryneum Kunzei* Corda, contrariamente all'opinione di Saccardo, di Roumeguère, di Spegazzini, e di Oudemans, ed affer-

mano che sono invece identici al nostro *Coryneum perniciosum* ed alla forma conidica della *Melanconis modonia* Tul. I signori Griffon e Maublanc non ne dicono invero le ragioni, ma questa loro affermazione era necessaria per identificare il nostro *Coryneum*, che ha indubbiamente per forma ascofora una *Melanconis* (della sezione *Hyalodidymae*) col *Coryneum Kunzei* var. *Castaneae* Sacc., giacchè il *Coryneum Kunzei* Corda ha invece per forma ascofora la *Pseudovalsa longipes* Tul. (della sezione delle *Phaeophragmiae*). Forse i signori Griffon e Maublanc sono stati indotti a fare tale esplicita distinzione, suggestionati dalla esteriore apparente somiglianza del nostro *Coryneum perniciosum* e della nostra *Melanconis perniciosa* con la forma conidica ed ascofora della *Melanconis modonia* Tul., descritte e figurate dal Tulasne; tanto più che il Saccardo, a la diagnosi della *Melanconis modonia* Tul., aggiunge: « Status conidicus (*Steganosporium Castaneae* Lib.) et spermogonicus adsunt. Cfr. Fuck. *Symb. myc.*, pag. 190 ».

Ma prima di tutto, domandiamo, lo *Steganosporum Castaneae* Lib., è un *Coryneum*?

Gli esemplari dell'erbario della Libert distribuiti dal Roumeguère, e quelli delle *Reliq. myc.* Lib. IV, n. 180 descritti dal Saccardo appartengono indubbiamente ad un *Coryneum*.

Ma è possibile che la signora Libert, osservatrice attenta e scrupolosa, abbia confuso il genere *Coryneum* del Nees (della sezione delle *Phragmosporae*) col genere *Steganosporium* del Corda (della sezione delle *Dictyosporae*)?

Se ciò fosse, in tale errore sarebbe caduto anche Paolo Brunaud, che nelle sue *Contributions à la flore mycologique de l'ouest* (Bull. de la Soc. Linn. de Normandie, 3ème sér., VI, pagg. 134-155. Caën, 1882), ne dà la descrizione sotto il nome di *Steganosporium Castaneae* Lib., indicandolo pel primo come forma conidica della *Melanconis modonia* Tul.

Nello stesso errore sarebbe incorso pure il Saccardo che ne riporta la diagnosi sotto il nome di *Steganosporium Castaneae* Lib. nel volume X della *Sylloge*, pag. 508, aggiungendovi: « Est st. conidicus *Melanconidis modoniae*. Cfr. Tul., *Carp.*, II, pag. 141, c. icon. ».

Nello stesso errore sarebbe altresì caduto l'Allescher, che ne riporta la descrizione aggiungendovi: « Conidienform zu *Melanconis modonia* Tul. Cfr. Tul., *Carp.*, II, pag. 141, c. icon.; Winter, *Pilze* ecc., II, pag. 778 ».

Noi non sappiamo se si tratta d'inesattezza od errore di riferimento del fungo della signora Libert, o se invece sia avvenuta confusione nel materiale di erbario. Quest'ultima ipotesi non sarebbe improbabile, tanto più che il Roumeguère nella sua « Revisio Reliquiae Libertianae » indica quale matrice del fungo in questione tanto il castagno che la quercia, e che nella copia del Roumeguère che noi possediamo dei *Fungi gallici exsiccati* esso è dato appunto al n. 634 sopra quest'ultima matrice e non sul castagno.

Se la forma conidica della *Melanconis modonia* Tul. è un vero *Steganosporium*, la *Melanconis perniciosa* non può avere con esso alcun rapporto come non può averne con il *Coryneum Kunzei* var. *Castaneae* Sacc. e con la *Melanconis modonia* Tul.

E quand'anche si riuscisse a dimostrare che il *Coryneum Kunzei* var. *Castaneae* Sacc. non ha alcun rapporto col *Corineum Kunzei* Corda, e che invece è identico allo *Steganosporium Castaneae* Lib., anche in tale caso non sarebbe dimostrata la sua identità col nostro *Coryneum perniciosum*, nè la identità della *Melanconis modonia* Tul. con la nostra *Melanconis perniciosa*.

Dicemmo già nella nostra prima pubblicazione per quali ragioni ritenevamo doversi tener distinto il *Coryneum perniciosum* dal *Coryneum Kunzei* var. *Castaneae* Sacc.; ora aggiungiamo un altro carattere distintivo importantissimo, riferentesi alla forma e alle dimensioni dei basidi. Il *Coryneum perniciosum* ha i basidi ramosi, relativamente grossi, ripetutamente settati e nodoso articolati; mentre il *Coryneum Kunzei* var. *Castaneae* Sacc. avrebbe basidi semplici, filiformi e relativamente esili come vedesi nella figura data dall'Oudemans,

Confrontandolo ora il *Coryneum perniciosum* con la forma conidica della *Melanconis modonia* Tul., quale venne descritta e figurata dal Tulasne (e che, a parer nostro, ricorda più un *Coryneum* che uno *Stegonosporium*) rileviamo che vi sono caratteri distintivi, sui quali in modo speciale riteniamo dovere richiamare l'attenzione.

Per la forma e le dimensioni dei conidi considerati nel rapporto delle due dimensioni, osserviamo che quelli del *Coryneum perniciosum* sono, in complesso, evidentemente di forma meno allungata di quelli descritti e figurati dal Tulasne, essendo questi ultimi proporzionalmente più sottili; ma entro gli estremi limiti da lui indicati (20-60 × 10-13 μ), non solo potrebbero entrare quelli del *Coryneum perniciosum*, ma anche quelli della maggior parte dei *Coryneum* corticoli che crescono sopra le cupolifere: e ciò, senza soverchiamente stiracchiare.

Citiamo ad esempio il *Coryneum Kunzei* Corda, il *C. disciforme* Kunze et Schum., il *C. Notarisianum* Sacc., il *C. oligosporum* Corda, il *C. pustulatum* Peck., il *C. Sydowianum* All., ecc., alcuni dei quali avrebbero altresì in comune altri caratteri.

Del resto il carattere più importante per distinguere il *Coryneum perniciosum* dalla forma descritta e figurata dal Tulasne, è anche in questo caso fornito dalle dimensioni e dalla forma dei basidii.

Il Tulasne, infatti, nella descrizione del suo fungo dice dei conidi: « in sterigma breve, simplex et crassiusculum solvuntur ». Ora, i basidii del *Coryneum perniciosum* sono invece relativamente lunghi (qualche volta fino

ad oltre 100 μ), sottili (4-4 $^1/_2$ μ) e ramificati, cosa di cui i signori Griffon e Maublanc possono accertarsi esaminando attentamente il nostro materiale.

Riteniamo quindi che il *Coryneum perniciosum* sia da tenersi distinto dalla forma conidica figurata dal Tulasne, anche per gli stessi caratteri che questi ha messo in evidenza nella sua descrizione e nelle sue figure.

***

Ora consideriamo i picnidi.

Confrontando la forma picnidica della nostra *Melanconis perniciosa* (*Fusicoccum perniciosum* Briosi e Farneti) con la forma picnidica della *Melanconis modonia* Tul. descritta dal Fuckel, troviamo che quest'ultima si presenta con: « spermatiis peritheciorum juvenilium oblongo-ovatis, continuis, hyalinis, 8 μ long., 4 μ crass., peritheciorum adultorum (macrospermatia) cylindraceis, curvatis, continuis, hyalinis, 10 μ long., 2 $^1/_2$ μ crass. », mentre la forma picnidica della *Melanconis perniciosa* descritta nella seconda nostra Nota presentasi con: « sporulis oblongo-fusoideis, intus granuloso-multiguttulatis, 56-66 × 11-13 μ; basidiis acicularibus, dimidio brevioribus ».

Perchè i signori Griffon e Maublanc, nell'identificare la *Melanconis perniciosa* con la *Melanconis modonia* Tul., non hanno preso in considerazione anche la forma picnidica? Le differenze sono tali che non hanno bisogno di essere messe in evidenza, e basterebbero da sole per non confondere la *Melanconis perniciosa* con la *Melanconis modonia* Tul.

***

Passiamo ora alla forma ascofora.

Se in questa le differenze non sono molte, non pertanto esse pure ci sembrano sufficienti per distinguere le due specie.

Le spore della *Melanconis perniciosa* sono generalmente più grosse in rapporto alla lunghezza, di quanto non lo siano quelle della *Melanconis modonia* Tul.; ma, a parte questo, lo stesso Tulasne ci indica un carattere molto importante, che basterebbe per non confondere le due specie, poichè egli scrive che le spore della *Melanconis modonia*, approssimandosi alla germinazione, si dividono in quattro cellule cosa che non avviene mai in quelle della *Melanconis perniciosa*, le quali rimangono sempre bicellulari.

Le differenze morfologiche che noi abbiamo sopra indicate, sono più che sufficienti per far tenere separate le due specie; ma a legittimare tale separazione si aggiunge altresì un carattere biologico, e di primo ordine, quello cioè del parassitismo del nostro fungo, che manca nella *Melanconis modonia* Tul. Quand'anche si trattasse di un semplice parassitismo facoltativo, questo fatto, a mente nostra, basterebbe per ritenere distinta la *Melanconis perniciosa* come forma specializzata, comportandosi essa per rispetto all'ospite, quale un vero *ctenofita*, come verrà dimostrato nel lavoro in *extenso* che quanto prima pubblicheremo negli *Atti dell'Istituto Botanico di Pavia*.

In conclusione, per quanto riguarda l'identicità o meno della nostra specie con altra di già nota, noi continuiamo a ritenere, anche dopo la pubblicazione dei signori Griffon e Maublanc, che le nostre tre forme, cioè il *Coryneum perniciosum*, il *Fusicoccum perniciosum* e la *Melanconis perniciosa*, si debbono tenere distinte dalla *Melanconis modonia* Tul. e dalle sue forme conidica e picnidica (1).

Meccanica. — *Sulla biforcazione di una vena liquida.* Nota I di U. Cisotti, presentata dal Socio Levi-Civita.

Meccanica. — *Sopra un caso di emisimmetria che si presenta in certe questioni di Idrodinamica.* Nota di G. Colonnetti, presentata dal Socio Levi-Civita.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Contributo allo studio delle tensioni elastiche.* Nota I di Umberto Crudeli, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

1. Sono noti i resultati ottenuti, nel 1906 (2), dal prof. Lauricella sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi.

Il metodo del prof. Lauricella per la risoluzione diretta del problema dell'equilibrio elastico, dati gli spostamenti in superficie, s'ispira al procedimento svolto dal sig. Fredholm per risolvere, con nuovo indirizzo, il problema interno del Dirichlet. Si prendono, cioè, le mosse da un sistema di soluzioni fondamentali (singolari) delle equazioni indefinite dell'equilibrio

(1) Le nostre pubblicazioni prese in esame dai sigg. Griffon e Maublanc, sono delle Note preliminari, alle quali deve seguire il lavoro definitivo. La prima parte di questo, ora in corso di stampa, è corredata di nove tavole di già stampate, nelle quali sono figurate: le diverse forme del parassita; le pustole iniziali ed i cancri che esso produce; il percorso che segue l'infezione dai rami al fusto, sino alla radice; le alterazioni anatomo-patologiche dei tessuti attaccati, e sonvi riprodotte le fotografie delle piante nelle quali si veggono i risultati di già ottenuti con la cura da noi consigliata, ecc.

Di queste tavole, noi ci permettiamo mandare in omaggio una copia a codesta eccelsa Accademia.

Un'altra copia abbiamo spedito ai signori Griffon e Maublanc, onde essi possano formarsi un'idea delle ricerche alle quali noi da tempo attendiamo.

(2) Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XV, serie 5ª, 1° sem.; Nuovo Cimento, serie V, tomo 13.

elastico e, analogamente a quanto si fa con l'$\frac{1}{r}$ (dove

$$r = 1\,(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)$$

nel caso della $\Delta^2 = 0$, si perviene a trovare sul contorno σ (assoggettato alle note restrizioni) dello spazio finito S, semplicemente connesso, occupato dal corpo, un sistema di equazioni integrali di 2ª specie (tipo Fredholm) dalla cui risoluzione dipende direttamente quella del suddetto problema degli spostamenti. Equazioni integrali, come abbiamo detto, del tipo Fredholm, nelle quali i nuclei divengono, nel punto $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ del contorno σ, infiniti del primo ordine rispetto alla $\frac{1}{r}$. Un procedimento perfettamente analogo viene però a mancare [1] qualora si voglia risolvere il problema dell'equilibrio elastico quando siano date sulla superficie σ le tensioni, invece degli spostamenti, problema che dovrebbe fare, in certo modo, riscontro, secondo l'idea citata, con quello di costruire una funzione armonica, avente data derivata normale sul contorno. Resulta, quindi, manifesta l'importanza di vedere se possa costruirsi un sistema di tensioni caratteristiche, il quale permetta sulla σ un qualche confronto, diciamo così, suggestivo, fra la componente della tensione secondo una data direzione e la derivata della $\frac{1}{r}$ secondo la direzione stessa. Nel presente lavoro costruisco appunto, nel corpo che occupa il supposto spazio S, un sistema di tensioni caratteristiche, il quale, sulla superficie σ, crea una tensione la cui componente secondo la normale a σ nel punto (x, y, z) [come pure secondo la normale a σ in (ξ, η, ζ)] diventa, sulla σ stessa, per $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$, infinita del primo ordine rispetto alla $\frac{1}{r}$ *indipendentemente dal sistema di assi costruttivo* [2]. E, perciò, in tal caso, la singolarità desiderata si ha *per quanto riguarda la componente normale della tensione*, analogamente, diciamo così, a quanto avviene per la derivata della $\frac{1}{r}$, derivata che, presa secondo una direzione *generica*, non avrebbe la singolarità in discorso, bensì una singolarità del secondo ordine. Cioè, qualora mi prendessi la libertà di abbreviare l'espressione « componente della tensione secondo una data direzione » col dire « tensione secondo una data direzione », all'espressione

[1] Circostanze analoghe sono state poste in luce chiaramente in una Memoria del prof. E. E. Levi, *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, comparsa fra le Memorie della Società dei XL (1909).

[2] Occorre por mente alla distinzione fra sistema d'assi costruttivo e sistema d'assi rappresentativo. Essi, generalmente, coincidono (come noi pure qui supporremo), ma l'uno serve per la costruzione a priori di tensioni, mentre l'altro serve per rappresentarle.

« derivata secondo una data direzione » verrebbe, nel caso che qui tratterò, a corrispondere, col significato suddetto, l'altra di « tensione secondo una data direzione ».

2. Come già ebbe a notare il Beltrami (1) [e come si deduce subito dalle equazioni indefinite dell'equilibrio elastico

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta^2 s_x + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \quad , \quad \Delta^2 s_y + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} \quad , \quad \Delta^2 s_z + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = 0 \\ \theta = \dfrac{\partial s_x}{\partial x} + \dfrac{\partial s_y}{\partial y} + \dfrac{\partial s_z}{\partial z} \, , \end{cases}$$

dopo avere ricordato il postulato di Hooke, che lega le tensioni caratteristiche alle caratteristiche della deformazione (2)] supposte eliminate le forze di massa (come noi quì sempre supporremo) fra le tensioni caratteristiche sussistono di conseguenza le seguenti relazioni

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha\Delta^2 X_x = 0 \, , \, \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \alpha\Delta^2 Y_y = 0 \, , \, \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \alpha\Delta^2 Z_z = 0 \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} + \alpha\Delta^2 X_y = 0 \, , \, \dfrac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z} + \alpha\Delta^2 Y_z = 0 \, , \, \dfrac{\partial^2 T}{\partial z\,\partial x} + \alpha\Delta^2 Z_x = 0 \\ T = X_x + Y_y + Z_z \, , \end{cases}$$

dove

$$\alpha = 1 + \Omega \text{ essendo } \Omega = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \text{ (rapporto di Poisson)}$$

ovvero

$$\alpha = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda+\mu)} = \frac{3k-1}{2k} \, .$$

(1) Rend. R. Acc. dei Lincei, 1892 (1° sem. pag. 142).

(2) Chiameremo « *caratteristiche della deformazione* » le sei quantità che gli inglesi chiamano « strains » e « *tensioni caratteristiche* » le sei tensioni dette « stress » dagli inglesi. Le prime verranno indicate con a, b, c, f, g, h intendendo

$$a = \frac{\partial s_x}{\partial x} \, , \, b = \frac{\partial s_y}{\partial y} \, , \, c = \frac{\partial s_z}{\partial z} \, . \, f = \frac{\partial s_z}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial z} \, , \, g = \frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \, , \, h = \frac{\partial s_y}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial y}$$

e le seconde con $X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z \, . \, Z_x, Z_y, Z_z$ dove $X_y = Y_x, X_z = Z_y, Z_x = X_z$. Talchè, in virtù del postulato di Hooke, sarà

$$X_x = (\lambda + 2\mu)\, a + \lambda b + \lambda c \, , \; Y_y = \lambda a + (\lambda + 2\mu)\, b + \lambda c \, , \; Z_z = \lambda a + \lambda b + (\lambda + 2\mu)\, c$$

$$Z_y = Y_z = \mu f \, , \; Z_x = X_z = \mu g \, , \; X_y = Y_x = \mu h \, ,$$

avendo indicato con λ e μ le due costanti d'isotropia (Tali costanti sono legate alla k dalla relazione $k = \dfrac{\lambda+\mu}{\mu}$). Si ricava $X_x + Y_y + Z_z = T = (3\lambda + 2\mu)\theta$.

E, dati i limiti entro cui trovasi compresa, nella ordinaria teoria della elasticità, la costante k, le relazioni (2) [già considerate come conseguenza dell'equilibrio elastico (1)] e le seguenti (3)

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x}+\dfrac{\partial X_y}{\partial y}+\dfrac{\partial X_z}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial Y_x}{\partial x}+\dfrac{\partial Y_y}{\partial y}+\dfrac{\partial Y_z}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial Z_x}{\partial x}+\dfrac{\partial Z_y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z_z}{\partial z}=0 \\ Y_x=X_y\ ,\ X_z=Z_x\ ,\ Z_y=Y_z \end{cases}$$

possono concepirsi nel loro insieme simultaneo (2) (3) come un sistema di equazioni atte ad individuare le pure deformazioni elastiche (infinitesime) (2).

Supposto trovato un sistema di tensioni caratteristiche, regolari nello spazio S, il postulato di Hooke

$$\begin{cases} X_x=(\lambda+2\mu)\,a+\lambda b+\lambda c \\ Y_y=\lambda a+(\lambda+2\mu)\,b+\lambda c \\ Z_z=\lambda a+\lambda b+(\lambda+2\mu)\,c \\ Y_z=\mu f\ ,\ Z_x=\mu g\ ,\ X_y=\mu h \end{cases}$$

ci fornirà le corrispondenti caratteristiche della deformazione, essendo il determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu \end{vmatrix}=4\mu^2(3\lambda+2\mu)$$

nella ordinaria teoria della elasticità diverso da zero, giacchè, in virtù dei limiti entro cui si pone, nella teoria medesima, il rapporto di Poisson, si ha, come è noto, $\mu>0$, $k>\frac{1}{3}$, ovvero $\mu>0$, $3\lambda+2\mu>0$. E gli spo-

(1) Rend. R. Acc. dei Lincei, 1905 (1° sem., pag. 129).

(2) È implicitamente inteso che noi qui consideriamo i corpi elastici isotropi ed omogenei.

stamenti potranno, poi, calcolarsi, a meno naturalmente di uno spostamento rigido arbitrario, mediante le note formule del Volterra (1).

Ritengo opportuno porre in luce, incidentalmente (anche per l'interesse che ciò può avere dal punto di vista fisico) come nel sistema di equazioni (2) e (3) si possono mettere in evidenza tre parti *a ciascuna delle quali, presa separatamente, può darsi la forma che ha*, nel caso di forze di massa derivanti da un potenziale, *il sistema delle equazioni del moto lento stazionario dei fluidi viscosi incompressibili*. Infatti, il suddetto sistema (2) (3) può scriversi così:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\alpha\Delta^2 X_x=0\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\alpha\Delta^2 X_y=0\ ,\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\alpha\Delta^2 X_z=0$$

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\alpha\Delta^2 Y_x=0\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\alpha\Delta^2 Y_y=0\ ,\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\alpha\Delta^2 Y_z=0$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\alpha\Delta^2 Z_x=0\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\alpha\Delta^2 Z_y=0\ ,\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\alpha\Delta^2 Z_r=0$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0$$

$$X_y=Y_x\ ,\ Y_z=Z_y\ ,\ Z_x=X_z\ ,\ T=X_x+Y_y+Z_z\ .$$

Da cui l'asserto resulta manifesto.

Ciò posto, vengo a costruire un sistema di integrali (cui più sopra ho alluso) delle equazioni simultanee (2) e (3), integrali che sono regolari nell'interno dello spazio S, mentre sul contorno σ la relativa componente della tensione secondo la normale n (come pure quella secondo la normale ν) diverrà sulla σ stessa, nel punto $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$, infinita del primo ordine rispetto alla $\frac{1}{r}$ (2). Con ν ho indicato la normale nel punto (ξ,η,ζ) fisso (arbitrario) del contorno σ, mentre n rappresenterà la normale nel punto generico del contorno stesso.

(1) Vedasi una Nota del prof. Almansi (Rend. R. Acc. dei Lincei, 1907, 1° semestre, pag. 23).

(2) Supposto il contorno σ assoggettato a note restizioni.

Il sistema di integrali in questione è il seguente

$$
(4)\quad
\begin{cases}
t_{11} = (k-1)\,\dfrac{d\frac{1}{r}}{dv} - (k+1)\,r\,\dfrac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\cos\widehat{rv} + \dfrac{\partial^2\cos\widehat{rv}}{\partial x^2} \\
t_{12} = -(k+1)\,r\,\dfrac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\cos\widehat{rv} + \dfrac{\partial^2\cos\widehat{rv}}{\partial x\,\partial y} \\
t_{13} = -(k+1)\,r\,\dfrac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\cos\widehat{rv} + \dfrac{\partial^2\cos\widehat{rv}}{\partial x\,\partial z} \\
t_{21} = -(k+1)\,r\,\dfrac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}\cos\widehat{rv} + \dfrac{\partial^2\cos\widehat{rv}}{\partial y\,\partial x} \\
t_{22} = (k-1)\,\dfrac{d\frac{1}{r}}{dv} - (k+1)\,r\,\dfrac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}\cos\widehat{rv} + \dfrac{\partial^2\cos\widehat{rv}}{\partial y^2} \\
t_{23} = -(k+1)\,r\,\dfrac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos\widehat{rv} + \dfrac{\partial^2\cos\widehat{rv}}{\partial y\,\partial z} \\
t_{31} = -(k+1)\,r\,\dfrac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\cos\widehat{rv} + \dfrac{\partial^2\cos\widehat{rv}}{\partial z\,\partial x} \\
t_{32} = -(k+1)\,r\,\dfrac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial y}\cos\widehat{rv} + \dfrac{\partial^2\cos\widehat{rv}}{\partial z\,\partial y} \\
t_{33} = (k-1)\,\dfrac{d\frac{1}{r}}{dv} - (k+1)\,r\,\dfrac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\cos\widehat{rv} + \dfrac{\partial^2\cos\widehat{rv}}{\partial z^2}\,.
\end{cases}
$$

La $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ s'intende relativa alla distanza fra il punto generico (x, y, z) dello spazio S, ed il punto (ξ, η, ζ) della superficie σ (1).

Meccanica. — *Contributo allo studio delle tensioni elastiche.* Nota II di Umberto Crudeli, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) Il seguito ad una prossima Nota.

Matematica. — *Un teorema sulle soluzioni delle equazioni lineari ellittiche autoaggiunte alle derivate parziali del secondo-ordine.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Nella presente Nota do un teorema per le soluzioni delle equazioni lineari ellittiche, autoaggiunte, alle derivate parziali del second'ordine che è perfettamente l'analogo del classico *teorema di confronto* di Sturm nella teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie del second'ordine. E la dimostrazione consiste appunto in una immediata estensione di quella che io detti del teorema indicato di Sturm nella mia Tesi di abilitazione (¹).

Il teorema, che qui dimostro, conduce poi ad una notevole proposizione sugli zeri delle soluzioni delle equazioni lineari ellittiche autoaggiunte del second'ordine, i cui coefficienti dipendono in un certo modo da un parametro λ, proposizione che, in particolare, stabilisce molto semplicemente una nota proprietà delle linee nodali nelle oscillazioni semplici di una membrana vibrante.

Lo stesso teorema permette altresì, come farò vedere in una Nota che seguirà la presente, di assegnare in modo preciso, per la più generale equazione ellittica autoaggiunta del second'ordine, il limite superiore di lunghezze lineari da cui dipende l'estensione di una regione piana di contorno prestabilito (per esempio, il limite superiore della larghezza di una striscia, della larghezza di una corona circolare, del raggio di un cerchio, ecc.) per la quale sussiste la proprietà che i valori dell'integrale assegnati su un contorno chiuso limitante un campo tutto contenuto in essa valgono a determinare l'integrale.

2. Si abbiano le equazioni ellittiche autoaggiunte del second'ordine:

$$(1)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\theta_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+t_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(t_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+ \\ +A_1(x,y)\,u=0,$$

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\theta_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+t_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(t_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+ \\ +A_2(x,y)\,u=0;$$

per le quali $\theta_1, \theta_2, t_1, t_2, \tau_1, \tau_2, \frac{\partial\theta_1}{\partial x}, \frac{\partial\theta_2}{\partial x}, \frac{\partial t_1}{\partial x}, \frac{\partial t_1}{\partial y}, \frac{\partial t_2}{\partial x}, \frac{\partial t_2}{\partial y}, \frac{\partial\tau_1}{\partial y}, \frac{\partial\tau_2}{\partial y}$,

(¹) Picone, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende una equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. XI). Le molte altre dimostrazioni che si conoscono del teorema di Sturm non mi pare siano suscettibili di una simile estensione.

A_1, A_2 sono funzioni finite e continue in un campo connesso e finito C di contorno chiuso c.

Avendo supposto le equazioni (1) e (2) ellittiche, risulterà in C

$$\theta_1 \tau_1 > 0 \quad , \quad \theta_2 \tau_2 > 0 ;$$

supporremo sempre, per fissare le idee, che in C sia

$$\theta_1 > 0 , \tau_1 > 0 \quad , \quad \theta_2 > 0 , \tau_2 > 0 .$$

Vale allora il seguente *teorema di confronto*:

Se è in C

$$\theta_1 \geq \theta_2 \quad , \quad (\theta_1 - \theta_2)(\tau_1 - \tau_2) - (t_1 - t_2)^2 \geq 0 .$$

$$A_2 \geq A_1$$

ed esiste una soluzione u *della* (1) *identicamente nulla sul contorno* c *di* C (1), *non potrà esistere una soluzione* v *della* (2) *per la quale il rapporto*

$$\frac{u}{v}$$

non sia costante in C *e ivi si conservi finito.*

Ammettendo infatti l'esistenza in C dell'indicata soluzione v della (2) per la quale il rapporto $\frac{u}{v}$ si conserva finito, si perverrà ad un assurdo nel modo che segue. Poichè u è nulla su c, si ha la relazione

$$(3) \qquad \iint \left\{ \theta_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2t_1 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy = \iint A_1 u^2\, dx\, dy ,$$

nella quale, ora come sempre in seguito, intenderemo gli integrali doppî estesi al campo C (2). Poniamo nella (3), in luogo di $A_1 u^2$, la sua eguale

$$-\frac{u^2}{v}\left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\theta_2 \frac{\partial v}{\partial x} + t_2 \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(t_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\} - (A_2 - A_1) u^2 ,$$

(1) Sottintendiamo naturalmente una soluzione non identicamente nulla in C. Avvertiamo che parlando di una soluzione di un'equazione del 2° ordine, supporremo la soluzione finita e continua nel campo C (il contorno incluso) insieme alle sue derivate prime.

(2) Cfr. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II (1905), pag. 23 e seg. Dalla (3) del teste si deduce, com'è noto, poichè la forma quadratica $\theta_1 X^2 + 2t_1 XY + \tau_1 Y^2$ è definita positiva, che se in C è $A(x, y) \leq 0$, una soluzione della (1) nulla su c è identicamente nulla in C, si deduce cioè, nell'ipotesi $A(x, y) \leq 0$, il teorema d'unicità per gl'integrali della (1) che prendono su c valori assegnati. Notiamo che questa conclusione non rientra in quella analoga del Picard a pag. 24 del luogo citato, rientra invece, supposta una più elevata derivabilità nei coefficienti dell'equazione, in un teorema del Paraf (cfr. Picard, loc. cit., pag. 34).

ciò che possiamo fare poichè $\frac{u^2}{v}$ si manterrà, per l'ipotesi fatta, finita e continua in C, il secondo membro della (3) si trasformerà allora nella somma seguente

$$-\iint \frac{u^2}{v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta_2\frac{\partial v}{\partial x}+t_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy-\iint \frac{u^2}{v}\frac{\partial}{\partial y}\left(t_2\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy-$$
$$-\iint (A_2-A_1)\,u^2\,dx\,dy\,.$$

Ora, tenendo presente l'ipotesi fatta su $\frac{u}{v}$ ed osservando che su c sarà $\frac{u^2}{v}=0$, integrando per parti si avrà

$$-\iint \frac{u^2}{v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta_2\frac{\partial v}{\partial x}+t_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=2\iint \left(\theta_2\frac{\partial v}{\partial x}+t_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{u}{v}\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy-$$
$$-\iint \left(\theta_2\frac{\partial v}{\partial x}+t_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy\,.$$

$$-\iint \frac{u^2}{v}\frac{\partial}{\partial y}\left(t_2\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=2\iint \left(t_2\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{u}{v}\frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy-$$
$$-\iint \left(t_2\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\,dx\,dy\,,$$

mentre il primo membro della (3) potrà anche scriversi

$$\iint \left\{(\theta_1-\theta_2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2(t_1-t_2)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+(\tau_1-\tau_2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$
$$+\iint \left\{\theta_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2t_2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy\,.$$

Ne segue quindi dalla (3)

$$\iint \left\{(\theta_1-\theta_2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2(t_1-t_2)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+(\tau_1-\tau_2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$
$$+\iint \left\{\theta_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2t_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+\tau_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy+\iint (A_2-A_1)\,u^2\,dx\,dy=0\,,$$

dalla quale ultima relazione, per le ipotesi

$$\theta_1\geq\theta_2\quad,\quad(\theta_1-\theta_2)(\tau_1-\tau_2)-(t_1-t_2)^2\geq 0\,,$$
$$\theta_2>0\quad,\quad\theta_2\tau_2-t_2^2>0\,,$$
$$A_2\geq A_1\,.$$

si deduce necessariamente,

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0,$$

cioè che il rapporto $\frac{u}{v}$ è costante in C. Questa conclusione, poichè in C non è identicamente $u = 0$, è contraria ad una delle ipotesi [1].

Osservando che l'equazione (2) può anche coincidere colla (1), possiamo dunque dire: Se esiste in C una soluzione u della (1) nulla su c, non può esistere una soluzione v della stessa (1) o della (2) che non si annulli mai in C (il contorno incluso), o che si annulli in modo che il rapporto $\frac{u}{v}$ si conservi finito in tutto C (il contorno incluso), a meno che u e v non dipendano linearmente.

Rileviamo che si ha in particolare:

In un campo C *in cui esiste una soluzione della* (1) *nulla sul contorno, ogni soluziona della stessa* (1) *o della* (2) *non può sempre conservarsi diversa da zero.*

Questa conseguenza, per quanto concerne la sola equazione (1), è ben nota.

3. Si abbia ora l'equazione

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left\{\theta(x,y;\lambda)\frac{\partial u}{\partial x} + t(x,y;\lambda)\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + \\ &+\frac{\partial}{\partial y}\left\{t(x,y;\lambda)\frac{\partial u}{\partial x} + \tau(x,y;\lambda)\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + \mathrm{A}(x,y;\lambda)\,u = 0, \end{aligned}$$

i cui coefficienti dipendono dal parametro λ in modo che essa sia ellittica per qualunque valore di λ. Si può facilmente dimostrare il teorema:

Se le funzioni $\theta(x,y;\lambda)$, $\tau(x,y;\lambda)$, $t(x,y;\lambda)$, $\mathrm{A}(x,y;\lambda)$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\tau}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$, *sono in* C, *per ogni valore di* λ, *finite e continue e soddisfano alle limitazioni*

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{P}(\lambda) \geq \theta(x,y;\lambda) \geq p(\lambda) > 0 \quad , \quad \mathrm{P}(\lambda) \geq \tau(x,y;\lambda) \geq p(\lambda) > 0, \\ \{\mathrm{P}(\lambda) - \theta(x,y;\lambda)\}\,.\,\{\mathrm{P}(\lambda) - \tau(x,y;\lambda)\} - t^2(x,y;\lambda) \geq 0, \\ \mathrm{M}(\lambda) \geq \mathrm{A}(x,y;\lambda) \geq m(\lambda) > 0, \end{cases}$$

[1] Osservando la dimostrazione del teorema può sembrare a prima vista che si possa fare a meno della condizione per la (1) d'essere ellittica, ma si vede facilmente che dalle diseguaglianze $\theta_1 \geq \theta_2, \theta_2 > 0, (\theta_1 - \theta_2)(\tau_1 - \tau_2) - (t_1 - t_2)^2 \geq 0, \theta_2\tau_2 - t_2^2 > 0$, segue $\theta_1 > 0, \theta_1\tau_1 - t_1^2 > 0$.

mentre si ha

$$(6) \qquad \lim_{\lambda=\infty} P(\lambda) = \textit{quantità finita o nulla} \quad , \quad \lim_{\lambda=\infty} m(\lambda) = \infty ,$$

assegnato un segmento di lunghezza σ *arbitrariamente piccola, esiste sempre un valore* λ_σ *di* λ *tale che per*

$$\lambda \geq \lambda_\sigma$$

ogni soluzione della (4) *si annulla in una qualunque porzione di* C *limitata da un cerchio di raggio* σ.

Confrontiamo infatti l'equazione (4) con l'equazione

$$(7_1) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left\{P(\lambda)\frac{\partial u}{\partial x}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{P(\lambda)\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + m(\lambda)\,u = 0 ,$$

che può anche scriversi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{m(\lambda)}{P(\lambda)}\,u = 0 ,$$

od anche, ponendo

$$(7_2) \qquad \begin{aligned} &\frac{m(\lambda)}{P(\lambda)} = 2\Lambda^2(\lambda) , \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\Lambda^2(\lambda)\,u = 0 . \end{aligned}$$

La funzione

$$v = \operatorname{sen} \Lambda(\lambda)\, x \operatorname{sen} \Lambda(\lambda)\, y$$

è una soluzione della (7), questa soluzione è nulla sul contorno di ogni quadrato Q^λ_{hk} formato dalle parallele agli assi coordinati

$$\begin{aligned} &x = h\frac{\pi}{\Lambda(\lambda)} \quad , \quad x = (h+1)\frac{\pi}{\Lambda(\lambda)} , \\ &y = k\frac{\pi}{\Lambda(\lambda)} \quad , \quad y = (k+1)\frac{\pi}{\Lambda(\lambda)} , \end{aligned}$$

h e k significando due arbitrarii numeri intieri. Ne segue intanto, dalle diseguaglianze (5), in forza del teorema del n. 2, che per ogni valore di λ, ogni soluzione della (4) si annulla in un qualunque quadrato Q^λ_{hk} che sia contenuto nel campo C.

Ma per la (6) si ha

$$\lim_{\lambda=\infty} \Lambda(\lambda) = \infty ,$$

esisterà pertanto, comunque piccolo sia σ, un tal valore λ_σ di λ che per $\lambda \geq \lambda_\sigma$ si abbia

$$\frac{\pi}{A(\lambda)} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{2}}.$$

Ora per gli indicati valori di λ non inferiori a λ_σ, in un qualunque cerchio di raggio σ è contenuto almeno un quadrato Q^λ_{hk}, per cui in una qualunque porzione di C limitata da un cerchio di raggio σ, pei detti valori di λ non inferiori a λ_σ, vi si annulla ogni soluzione della (4), c. v. d.

5. Ne concludiamo che se $u(x, y; \lambda)$ è una qualunque soluzione della (4), i punti le cui coordinate x e y soddisfano l'equazione

$$u(x, y; \lambda) = 0,$$

invadono *in modo uniforme*, per λ crescente all'infinito, una qualunque porzione di C, comunque piccola e dovunque situata.

Alle ipotesi del teorema, testè dimostrato, soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tau \frac{\partial u}{\partial y}\right) + (\lambda A + B)\, u = 0,$$

per la quale θ e τ non dipendono da λ e con $A(x, y)$ si conservano in C maggiori di una quantità positiva. Consideriamo la (4) nel caso ancora più particolare

$$\theta(x, y; \lambda) \equiv \tau(x, y; \lambda) \equiv 1 \ , \ t(x, y; \lambda) \equiv 0 \ , \ A(x, y; \lambda) \equiv \lambda^2,$$

consideriamo cioè *l'equazione delle membrane vibranti*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda^2 u = 0. \tag{8}$$

È noto che per classi particolari di contorni c di C è stata dimostrata l'esistenza di infiniti valori positivi di λ^2 (*i valori eccezionali di* λ^2)

$$\lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \cdots$$

aventi il punto infinito per unico punto limite, per ciascuno dei quali esistono soluzioni della (8) nulle su c e non identicamente nulle in C (1).

Considerando contorni c della specie indicata, designamo con $u(x, y; \lambda_k)$ una soluzione della (8), corrispondente al valore eccezionale λ_k^2, nulla su c, i punti di C (interni) in cui si annulla $u(x, y; \lambda_k)$ si distribuiscono in

(1) Cfr., per esempio, Poincaré, *Sur les équations de la Physique Mathématique* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1894)]; Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (Zweite Mitteilung) [Göttinger Nachrichten (1904)].

linee (1) costituenti le linee nodali in una oscillazione semplice di una membrana vibrante avente c per contorno fisso. Per cui il teorema del numero precedente, riflettendo che $\lim_{k=\infty} \lambda_k = \infty$, dà in particolare:

Le linee nodali in una oscillazione semplice di una membrana vibrante avente un qualunque contorno piano fisso della specie indicata, invadono in modo uniforme, nell'elevarsi indefinito del tono, una qualunque porzione (comunque piccola e dovunque situata) della regione del piano limitata dal contorno (2).

Matematica. — *Sul problema di Dirichlet per la più generale equazione lineare ellittica autoaggiunta alle derivate parziali del second'ordine.* Nota di Mauro Picone, presentata dal Socio L. Bianchi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla formola di Stokes che serve a determinare la forma del Geoide.* Nota II di A. Signorini, presentata dal Socio P. Pizzetti.

In questa Nota completiamo i risultati della Nota dello stesso titolo già pubblicata in questi Rendiconti nel senso indicato in fine della Nota stessa.

Supposto il Geoide poco differente da una sfera S_1 di raggio a, indichiamo con S una superficie pure poco differente da S_1 tale che siano noti i valori g che la gravità assumerebbe nei singoli suoi punti se il Geoide coincidesse con essa, la massa totale terrestre M e la velocità angolare terrestre ω restando inalterate.

Dette inoltre

$$r\,,\ \theta\,,\ v$$

(1) Cfr. per esempio, Riemann-Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, zweiter Band (1901), pag. 282 (teorema IV del § 114).

(2) Alla stessa proprietà, certamente con mezzi assai meno semplici, si perviene, come sarà stato osservato, valendosi del teorema della media per l'equazione (8), espresso dalla formola

$$u_0\,\mathrm{J}(\lambda r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r\,,\vartheta)\,d\vartheta,$$

dove $\mathrm{J}(x)$ designa la funzione di Bessel d'ordine zero e u_0 il valore di una soluzione u della (8) nel centro di un cerchio di raggio r tutto interno a C. Cfr. Riemann-Weber, loc. cit. (teorema VI del § 114).

le coordinate polari geocentriche di un punto qualunque dello spazio. diciamo $\Delta g_{\theta,v}$ l'anomalia che la gravità osservata in un punto (θ, v) del Geoide presenta rispetto al valore teorico g corrispondente al punto (θ, v) di S.

Sia poi, conformemente alle ipotesi fatte,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}(1 - \alpha t)$$

— ove α è una costante così piccola che nei nostri calcoli potremo sempre trascurare i termini che contengano a fattore il suo quadrato o il suo prodotto per ω^2. e t è una conveniente funzione di θ, v — l'equazione di G in coordinate polari geocentriche.

Avremo allora

$$\int_{4\pi} \Delta G_{\theta' v'} P_1(\theta, v ; \theta', v')\, d\Omega' = 0 ; \tag{1}$$

e l'equazione del Geoide sarà data da

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}(1 - \alpha t - \alpha \Delta t),$$

ove Δt è una funzione di θ, v legata alle funzione ΔG dalla equazione integrale

$$\Delta t_{\theta, v} = \frac{a^2}{2\pi f M \alpha} \int_{4\pi} \sum_0^\infty{}_n P_n(\theta v ; \theta' v')\, \Delta G_{\theta' v'}\, d\Omega' - \tag{2}$$
$$- \frac{5}{8\pi} \frac{a^2}{\alpha f M} \int_{4\pi} \Delta G_{\theta' v'}\, d\Omega' + \frac{3}{4\pi} \int_{4\pi} \sum_2^\infty{}_n P_n(\theta v ; \theta' v')\, \Delta t_{\theta' v'}\, d\Omega',$$

f essendo la costante dell'attrazione. e avendo posto, secondo il solito,

$$d\Omega' = \operatorname{sen} \theta'\, d\theta'\, d\varphi' \ (^1).$$

Il nucleo di questa equazione diviene evidentemente infinito per $\theta = \theta'$, $v = v'$. Volendo dunque risolverla, seguendo un procedimento dovuto a Fredholm, sarà in primo luogo da esaminare se qualcuno dei successivi nuclei iterati risulta finito e continuo per tutti i valori di θ, θ', v, v'.

In base ai risultati della Nota I, si trova subito

$$K_2(\theta, v ; \theta', v') = \frac{3}{4\pi} \sum_2^\infty{}_n \frac{3}{2n+1} P_n(\theta, v ; \theta', v')$$

ed anche — poichè il teorema ivi dimostrato, applicato, come è lecito, alla

(1) Cfr. Pizzetti, *Intorno alla determinazione teorica della gravità alla superficie terrestre*. Atti d. R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXI.

funzione

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{X_n(x)}{2n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1\,1+\xi'^4-2\xi'^2 x}\, d\xi' ,$$

ci dà

$$\int_c^1 \sum_0^\infty \frac{X_n(x)}{2n+1}\,\psi(x)\,dx = \sum_0^\infty \frac{1}{2n+1}\int_c^1 X_n(x)\,\psi(x)\,dx -$$

$$K_3(\theta v\,;\,\theta' v') = \frac{3}{4\pi}\sum_2^\infty \frac{3^2}{(2n+1)^2}\,P(\theta\,,v\,;\,\theta'\,,v').$$

Il 3° nucleo iterato è dunque sempre finito e continuo; e quindi, posto

$$E(\theta\,,v\,;\,\theta'\,,v') = -K(\theta\,,v\,;\,\theta'\,,v') - K_2(\theta\,,v\,;\,\theta'\,,v') =$$

$$(3)\qquad = -\frac{3}{4\pi}\sum_2^\infty \frac{2n+4}{2n+1}\,P_n(\theta\,,v\,;\,\theta'\,,v')$$

$$(4)\quad g(\theta v) = \frac{a^2}{2\pi f M\alpha}\int_{4\pi}\sum_0^\infty P_n(\theta v\,;\,\theta' v')\,\Delta G_{\theta' v'}\,d\Omega' - \frac{5}{8\pi}\frac{a^2}{\alpha f M}\int_{4\pi}\Delta G_{\theta' v'}\,d\Omega'$$

$$\overline{K}(\theta\,,v\,;\,\theta'\,,v') = K_3(\theta\,,v\,;\,\theta'\,,v')\,,$$

se l'equazione integrale

$$\Delta t_{\theta,v} = g(\theta\,,v) - \int_{4\pi} g(\theta'\,,v')\,E(\theta\,,v\,;\,\theta'\,,v')\,d\Omega' +$$

$$(5)\qquad + \int_{4\pi} \overline{K}(\theta v\,;\,\theta' v')\,\Delta t_{\theta' v'}\,d\Omega'$$

avrà una ed una sola soluzione, anche l'equazione integrale (2) avrà una ed una sola soluzione che coinciderà con essa.

Ora, la serie dei nuclei iterati dell'equazione integrale (5)

$$\sum_1^\infty{}_i\,\overline{K}_i = \frac{3}{4\pi}\sum_1^\infty{}_i\sum_2^\infty{}_n \frac{3^{3i-1}}{(2n+1)^{3i-1}}\,P_n(\theta\,,v\,;\,\theta'\,,v') =$$

$$= \frac{3^3}{8\pi}\sum_2^\infty \frac{2n+1}{n-1}\,\frac{1}{4n^2+10n+13}\,P_n(\theta\,,v\,;\,\theta'\,,v')$$

converge uniformemente per ogni valore di $\theta\,,\theta'\,,v\,,v'$. Quindi l'equazione integrale (4) avrà un nucleo risolvente

$$(6)\qquad \overline{\Gamma}(\theta v\,;\,\theta' v') = \frac{3^3}{8\pi}\sum_2^\infty \frac{2n+1}{n-1}\,\frac{1}{4n^2+10n+13}\,P_n(\theta v\,,\theta' v')\,,$$

e quindi anche l'equazione integrale (2) avrà una ed una sola soluzione, data da

$$\Delta t_{\theta v} = g(\theta v) - \int_{4\pi} E(\theta\,,v\,;\,\theta'\,,v')\,g(\theta'\,,v')\,d\Omega' +$$

$$(7)\qquad + \int_{4\pi}\overline{\Gamma}(\theta\,,v\,;\,\theta'\,,v')\left\{g(\theta'\,,v') - \int_{4\pi} E(\theta'\,,v'\,;\,\theta''\,,v'')\,g(\theta''\,,v'')\,d\Omega''\right\}d\Omega'.$$

Poniamo,

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(v - v')$$

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\gamma) = \Phi(\cos\gamma) = \operatorname{cosec}\frac{\gamma}{2} + 1 - 5\cos\gamma - 6\sin\frac{\gamma}{2} + \\ + 3\cos\gamma\log\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

Se, dopo ciò, nella (7), a $g(\theta v)$, $E(\theta, v ; \theta', v')$, $\overline{\Gamma}(\theta v ; \theta' v')$ sostituiamo i loro valori effettivi (4) (3) (6) ed integriamo termine a termine le serie che vengono allora a comparire sotto il segno integrale nel secondo membro della formola stessa — ciò che, per i risultati della Nota I, è perfettamente giustificato — tenendo presente la (1), si trova facilmente

$$\Delta t_{\theta,v} = -\frac{a^2}{8\pi f M a}\int_{4\pi}\Delta G_{\theta'v'}\,d\Omega' + \frac{a^2}{4\pi f M a}\int_{4\pi}\Delta G_{\theta'v'}\,\Phi(\gamma)\,d\Omega'.$$

Questa è appunto la formola di Stokes che serve a determinare la forma del Geoide.

Matematica. — *Sul criterio di Stéphanos.* Nota di A. Signorini, presentata dal Socio L. Bianchi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Variazioni periodiche di resistenza dei filamenti metallici sottili resi incandescenti con correnti alternate e deduzione delle loro proprietà termiche a temperatura elevata.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

In un circuito percorso da correnti alternate, la presenza di un conduttore avente una resistenza variabile con la intensità della corrente si traduce in una variazione della legge con cui questa si svolge nel tempo. La corrente non avrà più, in conseguenza, la forma sinusoidale, anche quando sia questa la legge di variazione della forza elettromotrice: e questo cambiamento di forma si tradurrà, in generale, nella sovrapposizione di alquanti armonici all'onda fondamentale, che resterà fortemente predominante se le oscillazioni di resistenza son lievi.

Il metodo oscillografico si presta poco in questo ultimo caso; poichè lievi modificazioni della forma della corrente possono restare dissimulate, ed essere difficilmente separabili gli armonici introdotti. Mi è stato invece

molto utile l'impiego del tubo di Braun, adoperato con una specie di bobina differenziale, nel modo che passo a descrivere.

Sul tubo agiscono, normalmente tra loro, una piccola bobina A e una molto grande bobina B, costituita da due avvolgimenti distinti assolutamente identici; a tal fine l'avvolgimento è eseguito con due fili paralleli anzichè con uno solo. Per uno dei due avvolgimenti passa una corrente sinusoidale derivata sulla linea attraverso a una resistenza ohmica; per l'altro la corrente che ha circolato nella resistenza variabile. La prima corrente traversa anche la bobinetta A, di cui sopra, mentre con una self ausiliaria inserita nell'altro circuito si rendono eguali le costanti di tempo dei due circuiti.

La grande bobina B è così percorsa contemporaneamente dalla corrente normale e dalla corrente da studiare: gli attacchi son fatti in modo che gli spostamenti subìti dal cerchietto luminoso per effetto delle due correnti siano di senso opposto: cosicchè quando queste sono comunque variabili, ma *assolutamente identiche* tra loro, il puntino resta in quiete nella sua posizione normale. In tali condizioni, l'azione di una sola delle due correnti è fortissima sul tubo: tale che il puntino sfugge totalmente, nel massimo di corrente, dal disco fluorescente e cade sulla parete di vetro.

Chiamiamo

$$i = \mathrm{A} \operatorname{sen} \omega t$$

la corrente normale nel 1° circuito; sia la corrente nel 2° circuito

$$i' = \mathrm{A}_1 \operatorname{sen} \omega t + \mathrm{B}_1 \cos \omega t + \mathrm{A}_2 \operatorname{sen} \omega t + \mathrm{B}_2 \cos 2\omega t + \ldots$$

nella quale, se la corrente è poco perturbata, tutti i coefficienti da B_1 in poi sono piccoli rispetto ad A_1.

Lo spostamento verticale del puntino sarà dato, per la contemporanea esistenza delle due, da

$$y = (\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}) \operatorname{sen} \omega t + \mathrm{B}_1 \cos \omega t + \mathrm{A}_2 \operatorname{sen} 2\omega t + \mathrm{B}_3 \cos 2\omega t + \ldots$$

mentre lo spostamento orizzontale sarà dato da

$$x = \mathrm{K} \operatorname{sen} \omega t$$

ove K è una costante.

Si disegneranno quindi sul disco delle curve più o meno complicate, che potranno facilmente essere fotografate e in alcuni casi si presteranno a una semplice interpretazione. Il successo pratico del metodo si deve a ciò che facendo $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}$, compensando cioè la componente più forte di i', lo spostamento y rivela tutte le perturbazioni più lievi nella forma della corrente che traversa la resistenza variabile.

2. Per dimostrare il partito che può trarsi dalla semplice disposizione descritta, riferirò, per adesso, i risultati ottenuti quando la resistenza variabile è costituita da alquante lampade a filamento metallico. Essi mi han consentito di verificare alcune delle conclusioni cui ero pervenuto in un mio lavoro anteriore sulle oscillazioni termiche dei filamenti sottili percorsi da correnti alternate (1).

Ebbi allora a dimostrare che detta W la potenza media spesa nel filo, emessa secondo una funzione $f(T)$ indeterminata della temperatura assoluta T; c la sua capacità colorifica nei limiti tra cui oscilla la temperatura, misurata in unità moccaniche; e a il coefficiente di variazione termica della resistenza r nei medesimi limiti; ϑ la temperatura del filo contata dalla sua temperatura media T_m; e ponendo

$$Q = af(T_m) + f'(T_m) = aW + \left(\frac{dW}{dt}\right)_{T_m} = a\left[W + r_m \frac{dW}{dr}\right]$$

le oscillazioni della temperatura si compiono sinusoidalmente e in modo tale che essendo la f. e. m. $e_0 \operatorname{sen} \omega t$, si ha

$$\vartheta = \Theta \cos(2\omega t - \varphi) \tag{1}$$

con

$$\Theta = -W\frac{\cos\varphi}{Q} = -W\frac{\operatorname{sen}\varphi}{2c\omega} \tag{2}$$

e

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2c\omega}{Q} \tag{3}$$

Il ritardo φ delle oscillazioni di ϑ è così computato sulle variazioni periodiche della potenza istantanea w, data da

$$w = W(1 - \cos 2\omega t)$$

La resistenza istantanea r sarà legata alla resistenza media r_m dalla relazione

$$r = r_m(1 + a\vartheta) \tag{4}$$

Le formole ci permettono perciò di prevedere l'alterazione prodotta dal filamento nella forma della corrente.

Infatti, l'intensità sarà data da

$$i = \frac{e_0 \operatorname{sen}\omega t}{r_m(1 + a\vartheta)}$$

(1) Corbino, Rend. Lincei, XIX, 1° sem., pag. 133 (1910).

ovvero per la piccolezza di $a\vartheta$ rispetto a 1, da

$$i = \frac{e_0 \operatorname{sen} \omega t}{r_m} \left[1 - a\Theta \cos(2\omega t - \varphi) \right]$$

da questa si deduce

$$i = \frac{e_0}{r_m} \left[\left(1 + \frac{a\Theta}{2} \cos \varphi \right) \operatorname{sen} \omega t - \frac{a\Theta}{2} \operatorname{sen} \varphi \cos \omega t - \frac{a\Theta}{2} \operatorname{sen}(3\omega t - \varphi) \right]$$

Abbiamo così una componente in $\operatorname{sen} \omega t$, e due componenti in $\cos \omega t$ e in $\operatorname{sen}(3\omega t - \varphi)$ d'ampiezza molto più piccola.

Questa corrente traversa, come si è detto, uno degli avvolgimenti della grande bobina differenziale, mentre per l'altro si manda una corrente indipendente in $\operatorname{sen} \omega t$, di intensità regolabile. Si può far in modo da annullare l'azione sul cerchietto della componente in $\operatorname{sen} \omega t$; resteranno così attive solo le altre due componenti, oltre allo spostamento orizzontale in $\operatorname{sen} \omega t$ prodotto dalla piccola bobina. Occorre perciò che la corrente compensatrice si possa regolare con squisita graduabilità.

Nelle mie esperienze la f. e. m. di città, di circa 105 Volt e 42 periodi, alimentava 12 lampade Osram da 16 o da 32 candele; la grande bobina differenziale era di tali dimensioni da produrre con un solo dei circuiti contrapposti (resistenza $^2/_3$ di ohm, autoinduzione circa 4 millihenry) lo spostamento di 12 mm. nel disco di Braun per una corrente continua di 150 milliampere, cosicchè alla corrente massima, che percorre un solo dei circuiti, corrisponderebbe una deviazione grandissima, superiore a 400 mm.

Malgrado ciò, se in luogo delle lampade a filo metallico si ricorre ad una resistenza invariabile, il compenso è assoluto, e la figura tracciata dal cerchietto si riduce ad una retta orizzontale, come se agisse sul tubo solo la bobinetta A. Con le lampade si ebbero invece dei risultati corrispondenti perfettamente alla teoria.

Aumentando progressivamente la corrente compensatrice, fino ad annullare nello spostamento verticale y la componente in $\operatorname{sen} \omega t$, il che si riconosce dal fatto che i massimi di y si portano a eguale altezza nelle due metà destra e sinistra della curva, questa presenta la forma della fig. (1). L'origine degli assi deve sempre essere un punto doppio della curva, se le costanti di tempo dei due circuiti sono eguali: poichè qualunque sia la legge di variazione di r col tempo, la corrente deve annullarsi contemporaneamente nei due circuiti, due volte a ogni periodo; si ha in ciò un criterio squisito per eguagliare le costanti di tempo medesime. Aggiungendo adesso la compensazione progressiva del termine in $\cos \omega t$ (con una terza bobinetta opportunamente alimentata), l'escursione nel senso y, che era già minima rispetto alle condizioni precedenti, diminuiva ancora; e poichè restavano in tal caso (quando il compenso era sufficiente) solo la componente in $\operatorname{sen}(3\omega t - \varphi)$

nel senso verticale, e lo spostamento orizzontale in sen ωt, doveva ottenersi la nota curva di Lissajous per la composizione ortogonale di una oscillazione col suo terzo armonico. Il segno dell'esatto compenso è dato da ciò che i sei massimi di y si portano, tre a tre, su due rette parallele all'asse x. La fig. 2, corrispondente a questo caso, conferma la previsione; e dalla forma avuta si deduce ancora che φ è molto prossimo a 90°.

Questo fa sì che l'ampiezza della componente di y in cos ωt, la quale per la (5) è data da $\frac{a\Theta}{2} \operatorname{sen} \varphi \frac{e_0}{r_m}$, è molto vicina, praticamente eguale, a

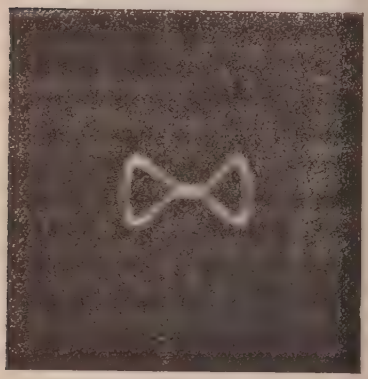


Fig. 1.

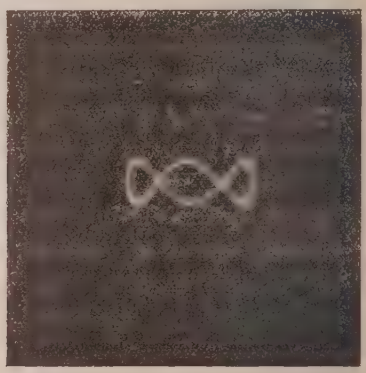


Fig. 2.

quella in sen $(3\,\omega t - \varphi)$, e ciò spiega perchè senza compensare quella componente si abbia la curva a 8 della fig. 1, che somiglia alla curva di composizione ortogonale d'una oscillazione con la ottava, mentre è in realtà la composizione del fondamentale in sen ωt con due oscillazioni, d'ampiezza quasi eguale, in cos ωt e sen $(3\omega t - \varphi)$, essendo φ prossimo a 90°.

Figure analoghe alle precedenti furono ottenute con lampadine da 32 candele

Ottenuto, con le due correnti compensatrici, l'isolamento del 3° armonico nello spostamento y, come all'incirca nella fig. 2, si può avere la misura di $a\Theta$. Basta a tal fine computare sullo schermo l'ampiezza di questo terzo armonico [1], traducendola in milliampere per confronto con lo spostamento prodotto da una corrente continua di intensità nota traversante uno degli avvolgimenti della bobina differenziale, e valutare la intensità efficace della corrente, e quindi la corrente massima che fornisce il valore di $\frac{e_0}{r_m}$.

[1] Le fotografie riprodotte sono prese attraverso alla parete cilindrica del tubo, dalla parte anteriore del disco fluorescente. Con l'artifizio di far agire sul tubo, longitudinalmente, un solenoide percorso da corrente continua, la macchietta circolare si riduce

Si ebbe in tal modo (tensione ai poli 103 Volt):

$$a\Theta = 0{,}0143 \pm 0{,}0006 \text{ per le lampade da 32 candele.}$$
$$a\Theta' = 0{,}0207 \pm 0{,}0005 \text{ » » » » 16 »}$$

Questi numeri rappresentano, per la (4), la misura della variazione massima di resistenza elettrica del filamento nelle varie fasi della corrente alimentatrice: quella variazione si compie con un ritardo prossimo a 90° sulle oscillazioni della potenza assorbita dal filo.

Cosicchè accettando il valore di a determinato dall'Ebeling coi filamenti metallici delle lampade di questo tipo (1), cioè $\frac{1}{1500}$, si dovrebbe concludere che le oscillazioni di temperatura hanno l'ampiezza di circa 10° per quelle da 32 candele, e di circa 15° per quelle da 16. Si tratta cioè di oscillazioni molto lievi di temperatura, e non di 250° come per le medesime lampade l'Ebeling credè di trovare col metodo oscillografico.

Molto più difficile riesce una valutazione esatta di $\cos\varphi$, per la vicinanza di φ a 90°; in questa regione un piccolo errore nella valutazione di φ apporta invero un grande errore relativo nella misura di $\cos\varphi$, e perciò la utilizzazione della prima delle (2) è poco consigliabile (2).

L'errore ha invece poca influenza sul valore di $\operatorname{sen}\varphi$, che può porsi eguale a 1 entro i limiti di approssimazione raggiunti in queste ricerche.

Possiamo perciò utilizzare la seconda delle (2), ponendo in essa $\operatorname{sen}\varphi = 1$; si ottiene allora

$$\frac{c}{a} = \frac{W}{2\omega a \Theta}$$

---

a un punto brillantissimo circondato da un'aureola nettamente staccata dal punto; e perciò la curva presenta un filetto interno sottilissimo che permette puntate molto esatte sulla parete posteriore del disco millimetrato.

(1) Ebeling, Ann. d. Physik; *27*, pag. 391 (1908).

(2) Si aggiunga che mentre per il primo armonico l'induttanza notevole (4 milli henry) di ciascuno degli avvolgimenti della grande bobina *è come non esistente*, poichè i due circuiti sono perfettamente allacciati e percorsi da correnti eguali, cosicchè la mutua induzione distrugge l'autoinduzione di ciascuno; lo stesso non può dirsi del 3° armonico che circola nell'uno, e che induce nel secondo una corrente la quale ne è solo una frazione e si compone vettorialmente con essa. Di questa corrente indotta che circola nel circuito compensatore occorrerebbe tener conto per correggere il valore dello spostamento sopra calcolato, poichè anche essa agisce, componendosi con la corrente inducente, sul cerchietto del tubo Braun; la correzione è di circa il $^1/_2$ per cento ed è perciò trascurabile. Ma l'errore apportato da questa causa sul valore misurato di $\cos\varphi$ può essere sensibile.

E perciò, per le lampade da 32 candele, essendo $\omega = 2\pi \times 42$ e $W = 103 \text{ Volt} \times \frac{3,9}{12}$ Ampère, sarà

$$\frac{c}{a} = 4,4$$

e per quelle da 16 $\left(W = 103 \text{ Volt} \times \frac{2.4}{12} \text{ Amp.}\right)$

$$\frac{c'}{a'} = 1,9$$

Le esperienze descritte (1) permettono adunque di dedurre il rapporto $\frac{c}{a}$ tra la capacità calorifica e il coefficiente di temperatura del filamento alla temperatura di regime; entrambi gli elementi sono inaccessibili alla esperienza diretta. Per passare dalle capacità calorifiche c ai calori specifici k espressi in piccole calorie, basta conoscere la massa M dei filamenti, che si determinò pesandoli dopo una delicata rottura del bulbo. Si ottenne così per quello da 32 candele M = gr. 0,0097, e per quello da 16 candele M = 0,0044; perciò

$$\frac{k}{a} = 108 \qquad \frac{k'}{a'} = 103$$

La conoscenza del valore di a permetterebbe perciò di dedurre il valore del calore specifico k alla elevata temperatura di regime; così adottando per a il valore $\frac{1}{1500}$ deducibile dalle misure di Ebeling, si trova

$$k = 0,072.$$

Ma è certo più prudente prendere come variabile indipendente la resistenza specifica anzichè la temperatura; quel rapporto misura invero la quantità di calore assorbita da 1 grammo del filo nel riscaldarsi, divisa per la conseguente variazione unitaria della resistenza. E perciò, il risultato ottenuto ci dice che *per riscaldare il filamento, alla temperatura di regime, di tanto che la sua resistenza si alteri di un millesimo, occorre un decimo di piccola caloria per ogni grammo della sua massa.*

Oltre alla conferma della teoria sopra ricordata, i risultati ottenuti ci forniscono adunque dei dati notevoli sulle costanti termiche del filamento, che non potevano essere dedotti per altra via allo stato attuale dei nostri mezzi sperimentali.

(1) Ricerche analoghe eseguite con lampade Z da 105 volt e 30 candele, alimentate a 102 volt, diedero

$$a\,\Theta = 0,015\,; \quad \frac{c}{a} = 3,4\,.$$

Matematica. — *Sugli integrali curvilinei.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Nel calcolo delle variazioni si considera l'integrale di una funzione $F(x, y, x', y')$ (positivamente omogenea, del grado 1, rispetto alle x', y', e soddisfacente a certe condizioni di continuità e derivabilità) calcolato lungo curve $C: x = x(t), y = y(t)$, tali che esistano finite e continue, eccettuati al più un numero finito di punti, le derivate $x'(t), y'(t)$; e ci si accontenta di dire che l'integrale non cambia per una trasformazione parametrica delle curve, ottenuta mediante la $t = t(\tau)$, quando si supponga la funzione $t(\tau)$ continua, a derivata maggiore di zero. Questa ipotesi è di troppo restrittiva; e poichè è interessante sapere fin dove è possibile spingere la trasformazione detta, senza alterare il valore dell'integrale della F, — specie oggidì che cominciano a considerarsi anche curve *semplicemente rettificabili*, — noi ci proponiamo di studiare appunto tale questione nella presente Nota.

1. Supporremo le nostre curve C, continue, rettificabili e giacenti in un campo A, in ogni punto (x, y) del quale e per qualunque coppia (x', y') di numeri finiti *non nulli insieme*, si immagina data una funzione continua [1] $F(x, y, x', y')$, la quale sia *positivamente omogenea* [2], del grado 1, rispetto alle variabili x', y': vale a dire, soddisfi alla relazione

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y'),$$

per qualsiasi $k > 0$.

2. Prima di procedere, occorre fare un'osservazione. Sia in un intervallo (τ_0, τ_1) la funzione continua, non decrescente, $t = t(\tau)$; con $t_0 = t(\tau_0)$, $t_1 = t(\tau_1)$. La sua funzione inversa $\tau = \tau(t)$, considerata in (t_0, t_1), sarebbe ad un valore se la $t(\tau)$ non fosse costante in nessun tratto; ma poichè tale ipotesi non è stata da noi fatta, potrà la $\tau(t)$ essere a determinazione multipla. Notiamo, però, che, se ad un valore t di (t_0, t_1) la $\tau = \tau(t)$ non fà corrispondere un sol valore τ di (τ_0, τ_1), a t devono corrispondere tutti i punti di un intervallo (τ', τ''), e solamente essi. Ne viene che, per la $\tau = \tau(t)$, ad ogni insieme E_t di punti di (t_0, t_1) corrisponde un insieme E_τ ben determinato di (τ_0, τ_1); e ad un intervallo (t', t''), un intervallo (τ', τ''). Dopo ciò, osserviamo che la $t(\tau)$, per essere non decrescente, è a variazione limitata ed ammette quindi derivata finita, $t'(\tau)$, in ogni punto di (τ_0, τ_1), ad eccezione, al più, di un insieme di misura nulla. Se in questo poniamo, per definizione, $t'(\tau) = 0$, abbiamo, in tutto (τ_0, τ_1), $t'(\tau) \geq 0$, ed anche

[1] Qui non poniamo alcuna condizione sulla derivabilità della F.

[2] Denominazione di Bolza (*Lectures on the Calculus of Variations*. Chicago, 1904).

$\int_{\tau'}^{\tau''} t'(\tau)\,d\tau \leq t(\tau'') - t(\tau')$ (1). Da ciò segue che, se (t', t''), (τ', τ'') sono due intervalli corrispondentisi nel modo sopra detto, è, indicando con $m[(t', t'')]$ la misura di (t', t''), $m[(t', t'')] = t'' - t' \geq \int_{\tau'}^{\tau''} t'(\tau)\,d\tau$.

Si prenda, ora, una successione infinita di gruppi J_t di intervalli senza punti comuni di (t_0, t_1), racchiudenti l'insieme E_t, in modo che ogni J_t sia contennto nel precedente e che la misura $m(J_t)$ tenda a $m(E_t)$. Siano J_τ, E_τ, gli aggregati corrispondenti a J_t, E_t. È $m(J_t) \geq \int_{J_\tau} t'(\tau)\,d\tau$, e poichè J_τ contiene E_τ, $m(J_t) \geq \int_{J_\tau} t'(\tau)\,d\tau \geq \int_{E_\tau} t'(\tau)\,d\tau$. Essendo poi $\lim m(J_t) = m(E_t)$, se ne conclude $m(E_t) \geq \int_{E_\tau} t'(\tau)\,dt$. Da ciò risulta che, *se* E_t *è di misura nulla,* in E_τ *è* $t'(\tau) = 0$, *ad eccezione al più di un insieme di misura nulla* e_τ (2).

3. Sia ora una delle curve C (n. 1), e sia $x = x(s)$, $y = y(s)$, $(s_0 \leq s \leq s_1)$ la sua rappresentazione parametrica in funzione dell'arco. Come si sa (3) in tutti i punti di (s_0, s_1), eccettuati al più quelli di un insieme di misura nulla $\mathcal{E}_s$, le derivate $x'(s), y'(s)$, esistono determinate e finite, e soddisfano all'uguaglianza $\overline{x}'^2(s) + \overline{y}'^2(s) = 1$. E poichè il campo dei punti (x, y, x', y') tali che (x, y) sia su C e x', y' soddisfino alla relazione $x'^2 + y'^2 = 1$ è finito e chiuso, la $F(x, y, x', y')$ supposta continua, è in esso limitata. Ne viene che, ad eccezione dell'insieme di misura nulla detto, la $F(x(s), y(s), x'(s), y'(s))$ — che poniamo uguale allo zero nei punti ove le $x'(s), y'(s)$ non esistano o sono ambedue nulle — è pure limitata. Perciò tale funzione, che nell'insieme complementare di $\mathcal{E}_s$, $C(\mathcal{E}_s)$, è, per un noto teorema (4), della classe 1 (classificazione di Baire) e quindi misurabile, è anche integrabile. Esiste dunque determinato e finito l'integrale $\int_{s_0}^{s} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s))\,ds$, per ogni s di (s_0, s_1). Ciò posto,

(1) Per vederlo, basta riprendere i ragionamenti fatti da G. Vitali nella sua Nota: *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1907-08), al Cap. II, § 2, per dimostrare l'integrabilità di un numero derivato di una funzione a variazione limitata.

(2) Il ragionamento qui usato mi è stato suggerito da quello di cui si è servito il Lebesgue (*Sur les intégrales singuliers*, Ann. de la Fac. de Toulouse, 3° S., I) per dimostrare la medesima posizione nel caso di una funzione integrale, non decrescente, $t(\tau)$.

(3) Vedi Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des functions primitives* (Paris, Gauthier-Villars, 1904), pag. 126.

(4) Vedi Lebesgue, *Sur les fonctions représentables analytiquement* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1905).

prendiamo a considerare la rappresentazione generale della curva C in funzione di un parametro arbitrario t: $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$, $(t_0 \leq t \leq t_1)$.

Se indichiamo con $S(t)$ la lunghezza della curva, questa funzione risulta positiva, continua e non decrescente, e come tale — essendo a variazione limitata — ammette, per tutti i valori di t dell'intervallo (t_0 , t_1), ad eccezione al più di quelli di un insieme di misura nulla e'_t, derivata determinata e finita. Posto $I(s) = \int_{s_0}^{s} F(x(s) , y(s) , x'(s) , y'(s))\, ds$ — dove s_0 ed s sono i valori di $s(t)$ che corrispondono a t_0 , t — questa $I(s)$ risulta funzione continua, a traverso la s, di t; vogliamo mostrare che ammette in tutti i punti di (t_0 , t_1), eccettuati quelli di un insieme di misura nulla, derivata uguale a $F(x(s(t)) , y(s(t)) , x'_s(s(t)) , y'_s(s(t)))\, s'(t)$. L'integrale $I(s)$, come funzione del suo estremo superiore s, ammette in tutti i punti di (s_0 , s_1), meno quelli di un insieme E_s di misura nulla, per derivata la funzione sotto il segno $F(x(s) , y(s) , x'(s) , y'(s))$. Indichiamo con E_t l'aggregato dei punti dell'intervallo (t_0 , t_1) che la $s(t)$ fa corrispondere ad E_s; per quanto si è detto al n. precedente, è in E_t, esclusi al più i punti di un gruppo e_t di misura nulla, $s'(t) = 0$. Si ha, allora, in ogni punto di $C(E_t)$ che non appartiene ad e'_t,

$$(1) \qquad I'_t(s(t)) = I'_s(s(t)) \,.\, s'(t) = F(x(s(t)) \,.\, y(s(t)) , x'_s(s(t)) , y'_s(s(t)))\, s'(t) ;$$

e la stessa uguaglianza vale anche per quei punti di E_t che non appartengono all'insieme $e'_t + e_t$, perchè in essi è $s'(t) = 0$. Dunque, eccettuati i punti dell'insieme di misura nulla $e'_t + e_t$, $I(s(t))$ ammette derivata rispetto a t, e vale la (1). E poichè $s'(t)$, come derivata di una funzione a variazione limitata, è certamente integrabile, tale è anche la $I'_t(s(t))$, perchè la funzione $F(x(s(t) , y(s(t)) , x'_s(s(t) , y'_s(s(t)))$ è in (t_0 , t_1) limitata. Consideriamo, ora, l'espressione $F(x_1(t) , y_1(t) , x'_1(t) , y'_1(t))$. Essendo $x_1(t) , y_1(t) , s(t)$, a variazione limitata, le derivate $x'_1(t) , y'_1(t) , s'(t)$, esistono finite in tutti i punti di (t_0 , t_1), ad eccezione al più di un insieme di misura nulla E. La F non è definita in quei punti di E nei quali non esistono entrambi le $x'(t) , y'(t)$, ed in quelli di C(E) ove esse esistono, ma sono ambedue nulle. Negli uni e negli altri porremo, per definizione, $F(x_1(t) , y_1(t) , x'_1(t) , y'_1(t)) = 0$. Vogliamo mostrare che in C(E) è sempre

$$(2) \qquad F(x_1(t) , y_1(t) , x'_1(t) , y'_1(t)) = F(x(s(t)) , y(s(t)) , x'_s(s(t)) , y'_s(s(t)))\, s'(t) .$$

Indichiamo con $C_1(E)$ il gruppo dei punti di C(E) in cui è $s'(t) = 0$; con $C_2(E)$ quello dei rimanenti. È, se $s(t + \delta) - s(t) > 0$,

$$(3) \qquad \frac{x_1(t + \delta) - x_1(t)}{\delta} = \frac{x_1(t + \delta) - x_1(t)}{s(t + \delta) - s(t)} \cdot \frac{s(t + \delta) - s(t)}{\delta} ,$$

da cui, essendo

$$\left|\frac{x_1(t+\delta)-x_1(t)}{s(t+\delta)-s(t)}\right| \leq 1, \left|\frac{x_1(t+\delta)-x_1(t)}{\delta}\right| \leq \frac{s(t+\delta)-s(t)}{\delta};$$

se poi fosse $s(t+\delta)-s(t)=0$, sarebbe a più forte ragione $x_1(t+\delta)-$ $-x_1(t)=0$. Se ne deduce che nei punti di $C_1(E)$ è $x_1'(t)=0$; ed analogamente $y_1'(t)=0$. È dunque, nei punti detti, $F(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))=0$; ed essendo $s'(t)=0$, vale in $C_1(E)$ la (2). Sia t un punto di $C_2(E)$; poichè in esso vale la (3), per δ abbastanza piccolo, esiste $x_s'(s)$, ed è $x_1'(t)=$ $=x_s'(s(t))\,s'(t)$. Analogamente esisterà nei punti di $C_2(E)$ la $y_s'(s)$, e si avrà $y_1'(t)=y_s'(s(t))\,s'(t)$. Ne viene che in $C_2(E)$ vale la (2), la quale risulta così dimostrata in tutto C(E). Essendo E di misura nulla ed esistendo l'integrale del secondo membro di tale uguaglianza, esiste anche quello del prino ed è

$$\int_{t_0}^{t} F(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))\,dt = \tag{4}$$
$$= \int_{t_0}^{t} F(x(s(t)), y(s(t)), x_s'(s(t)), y_s'(s(t)))\,s'(t)\,dt.$$

Concludiamo con la seguente proposizione: *qualunque siano le funzioni continue* $x=x_1(t)$, $y=y_1(t)$, *che rappresentano in* (t_0, t_1) *la curva rettificabile* C, *esiste sempre l'integrale*

$$\int_{t_0}^{t} F(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))\,dt, \quad (t_0 \leq t \leq t_1),$$

dove F rappresenta lo zero nei punti nei quali una delle derivate $x_1'(t), y_1'(t)$ non esiste, ed in quelli ove è $x_1'(t)=y_1'(t)=0$.

4. Supponiamo le $x_1(t), y_1(t)$, *assolutamente continue* (1); allora è tale anche $s(t)$ (2) ed è $s(t)=\int_{t_0}^{t} s'(t)\,dt$. Essendo poi $s(t)$ funzione non mai decrescente di t, segue da un teorema sull'integrazione per sostituzione, dovuto ad H Lebesgue (3), e dalla (4)

$$\int_{s(t_0)}^{s(t)} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s))\,ds = \int_{t_0}^{t} F(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))\,dt. \tag{5}$$

Dunque, *se sono assolutamente continue le funzioni* $x_1(t), y_1(t)$ — *oppure se lo è* $s(t)$ — *vale la* (5).

(1) Diremo, con G. Vitali [*Sulle funzioni integrali* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1904-05)] *assolutamente continua* una funzione $f(x)$ in (a, b), se preso un numero positivo σ, piccolo a piacere, esiste poi sempre un corrispondente μ, maggiore di zero, tale che sia $|\Sigma|f(\beta_i)-f(\alpha_i)||<\sigma$, dove la sommatoria è estesa ad un qualsiasi gruppo d'intervalli (α_i, β_i), senza punti comuni, di (a, b), avente una misura minore di μ.

(2) L. Tonelli, *Sulla rettificazione delle curve* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1907-08).

(3) *Sur les integrales singuliers* (loc. cit.).

Si ha anche che *se* $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$; $x = x_2(\tau)$, $y = y_2(\tau)$, *sono due rappresentazioni della stessa curva* C, *e se tutte le funzioni scritte sono assolutamente continue, allora è*

$$\int_{t_0}^{t} F(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))\, dt = \int_{\tau_0}^{\tau} F(x_2(\tau), y_2(\tau), x_2'(\tau), y_2'(\tau))\, d\tau .$$

In queste proposizioni si può sostituire l'assoluta continuità con l'esistenza di un numero derivato finito in tutti i punti dell'intervallo in cui si considera, eccettuati al più quelli di un insieme riducibile.

5. Le condizioni dianzi trovate sono solo sufficienti: per giungere a quelle che sono anche necessarie, faremo l'ipotesi che la F sia sempre diversa da zero. Dimostriamo, allora, che *affinchè valga, per ogni* t *di* (t_0, t_1) *l'uguaglianza*

$$(6) \quad \int_{s(t_0)}^{s(t)} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} F(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))\, dt$$

è necessario che la $s(t)$ *sia assolutamente continua.* Non lo sia, se è possibile. Dovrà esistere un σ tale che, per quanto piccolo si prenda il numero positivo μ, si possa poi sempre trovare un gruppo d'intervalli (α_i, β_i) senza punti comuni e di somma minore di μ, in modo da rendere soddisfatta la disuguaglianza $\sum_i \{s(\beta_i) - s(\alpha_i)\} > \sigma$. Osserviamo qui che, eccettuati i valori di s di un insieme di misura nulla, è $\overline{x}'^2(s) + \overline{y}'^2(s) = 1$; e poichè la F nei punti $(x(s), y(s), x'(s), y'(s))$ corrispondenti è continua e diversa da zero, e perciò anche maggiore di un minimo $m > 0$, fisso, se per es. è $F > 0$, possiamo scrivere

$$\int_{s(\alpha_i)}^{s(\beta_i)} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s))\, ds > m \{s(\beta_i) - s(\alpha_i)\},$$

$$\sum_i \int_{s(\alpha_i)}^{s(\beta_i)} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s))\, ds > m\sigma,$$

e ciò vale comunque si prenda piccolo il μ, numero maggiore della somma degli intervalli (α_i, β_i).

Questo prova che la funzione di t che figura al primo membro della (6) non è assolutamente continua; e poichè, invece, lo è quella del secondo, giungiamo ad un assurdo. La proposizione propostaci è così dimostrata; e possiamo dire, riunendo il risultato qui ottenuto e quello del n. precedente, che la *continuità assoluta della* $s(t)$ (o delle $x_1(t)$, $y_1(t)$) *è condizione necessaria e sufficiente affinchè valga la* (6), *quando la* F *sia sempre diversa da zero.* Abbiamo anche: *se la* F *è sempre diversa da zero e se le* $x_1(t)$,

$y_1(t)$ sono assolutamente continue, la condizione necessaria e sufficiente affinchè valga, per ogni t di (t_0, t_1) la

$$\int_{t_0}^{t} F(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))\, dt = \int_{\tau_0}^{\tau} F(x_2(\tau), y_2(\tau), x_2'(\tau), y_2'(\tau))\, d\tau,$$

è che siano tali anche le $x_2(\tau), y_2(\tau)$.

6. Nel caso della $F \neq 0$ e, per es., maggiore di zero, possiamo provare che: *l'integrale* $\int_{t_0}^{t} F dt$, *al variare della rappresentazione parametrica della curva, assume tutti i valori possibili compresi tra un minimo, uguale allo zero, ed un massimo, dato da* $\int_{s_0}^{s} F(ds)$. Riprendiamo l'integrale $I(s)$ del n. 3. Per l'ipotesi qui fatta su F, $I(s)$ è, come la $s(t)$, funzione non decrescente; tale è, perciò, anche $I(s(t))$. Si ha così, per un'osservazione già fatta a proposito dell'integrale di $t'(\tau)$ (n. 2),

$$\int_{t_0}^{t} I_t'(s(t))\, dt \leq I(s(t)) - I(s(t_0)) = I(s(t)).$$

Ma è (n. 3)

$$\int_{t_0}^{t} I_t'(s(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} F(x(s(t)), y(s(t)), x_s'(s(t)), y_s'(s(t)))\, s'(t)\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} F(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))\, dt,$$

e quindi

$$\int_{t_0}^{t} F(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))\, dt \leq \int_{s_0}^{s} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s))\, ds.$$

Per mostrare, ora, che il valore dell'integrale di F può ridursi a zero, consideriamo nell'intervallo $(0,1)$ l'insieme J di Cantor, costituito dai punti di ascissa $t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots$, dove i numeratori a sono uguali a zero, oppure a 2; e definiamo su $(0,1)$ la seguente funzione: su J sia $\varphi(t) = \left\{ \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots \right\}$, per $t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots$, negli intervalli contigui ad J la $\varphi(t)$ sia costante. È dunque $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, vale a dire la $\varphi(t)$ non è costante in tutto $(0,1)$; si vede poi facilmente che essa è continua, non decrescente e non assolutamente continua (1). Ciò posto, si consideri il tratto $(0 \leq s \leq 1)$ della curva $C: x = x(s), y = y(s)$, e si ponga $s = \varphi(t)$: si avrà $x = x_1(t), y = y_1(t)$.

(1) Di questo esempio si è servito il Lebesgue (*Leçons sur l'intégration etc.*, pag. 55) per mostrare che il calcolo della variazione totale di una funzione non può essere fatto servendosi di gruppi di infiniti intervalli contigui ad insiemi non riducibili.

La $\varphi(t)$ è costante — ed è perciò $\varphi'(t) = 0$ — in tutti i tratti contigui ad J, le cui lunghezze hanno una somma uguale ad 1; da ciò segue che, essendo $\varphi'(t) \neq 0$ solo nei punti di J, insieme di misura nulla, è (per la (4))

$$\int_0^1 F(x_1(t), y_1(t), x_1'(t), y_1'(t))\, dt =$$

$$= \int_0^1 F(x(\varphi(t)), y(\varphi(t)), x_s'(\varphi(t)), y_s'(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = 0 .$$

Dall'arco $(0, 1)$ si passa facilmente a quello (s_0, s) che corrisponde a (t_0, t). Pure facilmente si vede ora che con una appropriata rappresentazione parametrica della curva C, si può fare assumere all'integrale di F qualunque valore compreso tra 0 e $\int_{s_0}^{s} F ds$. Osserviamo che, mentre la $s = \varphi_1(t)$ che rende nullo l'integrale di F è solo non decrescente, è possibile trovare delle trasformazioni $s = \varphi_1(t)$, con $\varphi_1(t)$ *sempre crescente* e tale che sia, ovunque, $\frac{\varphi_1(t+h) - \varphi_1(t)}{h} \geq \sigma > 0$, per le quali l'integrale vada tendendo a zero con σ: basta, infatti, considerare la $\varphi_1(t) = \varphi(t) + \sigma t$.

Da quanto precede risulta che l'integrale di F si può rendere uguale a zero anche se la condizione $F \neq 0$ non è verificata.

Chimica. — *Sulla sintesi diretta dei gliceridi* (1). Nota II di I. Bellucci, presentata dal Socio E. Paternò.

In continuazione di una mia Nota: *Sulla sintesi diretta dei gliceridi*, recentemente pubblicata in questi Rendiconti (2), comunico altri risultati ottenuti proseguendo le indagini sperimentali sopra tale processo sintetico, il cui interesse, sia dal lato teorico che industriale, mal giustifica le poche e fallaci conoscenze che finora si avevano sul suo andamento.

A maggiore comprensione dei risultati da me ottenuti rammento che gli indirizzi chimici sinora seguiti per effettuare la sintesi diretta dei gliceridi si riducono ai due seguenti:

1°. *Sintesi tipo Berthelot* (3) (1854). — La miscela acido grasso-glicerina (o anche acido grasso e mono- o digliceride), nella quale prevale a seconda dei casi un forte eccesso di parte acida o di glicerina, viene scaldata a 200°-260° entro tubo chiuso alla lampada, per un tempo generalmente molto lungo. Il rendimento in gliceride è in tal modo molto debole,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Roma.
(2) Vol. XX, Serie 5ª, 1° semestre, pag. 125.
(3) *Annales de chim. et phys.* [3] *41*, 216.

data evidentemente l'azione saponificante che su di esso esercita l'acqua generatasi nella reazione, all'elevata temperatura a cui si produce.

2°. *Sintesi tipo Scheij* (1) (1899). — La miscela acido grasso-glicerina, nella quale prevale un eccesso di acido, viene scaldata mentre vi si fa gorgogliare una corrente di aria secca, aspirata dall'esterno, attraverso un tubo capillare, col diminuire parzialmente la pressione nell'interno dell'apparecchio. In tal modo l'aria secca, mentre trascina il vapor d'acqua, mantiene agitato il miscuglio producendo un più intimo contatto fra l'acido grasso e la glicerina. L'eliminazione dell'acqua è in tal modo molto lenta; nel caso, ad esempio, della tripalmitina non cessa che dopo tre giorni di continuato riscaldamento a 200°.

Tanto con l'un metodo che con l'altro, trattasi adunque di riscaldare la miscela acido grasso-glicerina per un tempo molto lungo, a pressione superiore alla normale (Berthelot), o debolmente inferiore (Scheij), impiegando un forte eccesso di uno dei reagenti, eccesso che va tolto al termine della reazione e che esclude quindi si possa parlare di rendimenti. Tutti gli altri autori che si sono occupati della sintesi diretta dei gliceridi hanno seguito l'uno o l'altro dei due tipi di reazione, apportandovi talora modificazioni insignificanti e preferendo, come era logico, il metodo Scheij.

Eravamo perciò ben lungi dall'ottenere una sintesi diretta, rapida, economica e con rendimento vicino al teorico.

Nella Nota da me recentemente pubblicata in questi Rendiconti (loc. cit.) ho comunicato che può invece realizzarsi la sintesi diretta dei comuni gliceridi (trioleina, tripalmitina, tristearina), con rendimento pressochè teorico, riscaldando nel vuoto molto spinto e continuato la miscela acido grasso-glicerina, effettuata nei soli rapporti stechiometrici, vale a dire senza alcun eccesso di uno dei reagenti. L'azione continuata del vuoto, permettendo di ottenere un simile risultato, mai raggiunto da alcuno dei precedenti sperimentatori, appariva perciò con carattere fondamentale nello svolgimento della reazione in esame.

Sempre allo scopo di meglio precisare le condizioni secondo cui può nel miglior modo e col massimo rendimento effettuarsi la sintesi diretta dei gliceridi, ho continuato in proposito le mie indagini.

Osservando il sistema:

$$\text{glicerina} + \text{ac. grasso} \rightleftharpoons \text{gliceride} + \text{acqua},$$

appare subito come l'eliminazione continua e completa dell'acqua sia la prima ed essenziale condizione per giungere ad un massimo ricavato in gliceride.

È necessario pertanto riflettere che la reazione fra glicerina ed acido grasso, effettuata nel vuoto molto spinto, si inizia a circa 180°, vale a dire ad

(1) *Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas*, [2] *18*, 169.

una temperatura ben superiore a quella in cui l'acqua può all'ordinaria pressione spontaneamente eliminarsi allo stato di vapore. Si affacciava adunque il problema di sperimentare se tale reazione sintetica, oltrechè nel vuoto, potesse con egual risultato effettuarsi a pressione ordinaria, permettendo sempre, in un ambiente inerte, il libero e continuo svolgersi del vapor d'acqua dalla miscela reagente.

Con tale intento ho riscaldato una miscela stechiometrica di ac. oleico (3 molec.) e di glicerina (1 molec.) in ambiente di anidride carbonica secca, senza che questa gorgogliasse attraverso la miscela liquida. La reazione si svolge a 200°-250°; dopo circa tre ore di riscaldamento si ha il favorevole risultato che l'eliminazione dell'acqua cessa e la massa reagente non presenta più che un'acidità debolissima (dall'1 al 2 % in acido oleico). La trioleina ottenuta in tal modo si presenta con il suo bel colorito giallo chiaro; lavata ripetutamente con un po' d'acqua e quindi con alcool a freddo, venne seccata e identificata con la determinazione del punto di fusione e dei numeri di iodio e di saponificazione.

Risultati del tutto simili si ottengono riscaldando in egual modo quantità stechiometriche di glicerina con l'acido palmitico o stearico.

L'eliminazione dell'acqua prodottasi nella reazione avviene indipendentemente dalla corrente del gas inerte, senza escludere che questa la faciliti; tuttavia il gas va condotto in maniera limitata, non troppo vivace, e nell'intento precipuo di mantenere l'ambiente inerte (1). Come era da aspettarsi, ho inoltre osservato che la durata della reazione è molto abbreviata se con un opportuno e rapidissimo agitatore, si tiene durante il riscaldamento fortemente emulsionata la miscela glicerina-ac. grasso, aumentando così grandemente la superficie di contatto fra i due reagenti, ed impedendo che altrimenti la glicerina rimanga stratificata al fondo del recipiente ad offrire solo una superficie limitatissima di reazione all'acido sovrastante.

Con quanto ho ora esposto la sintesi diretta dei gliceridi (limitandosi per ora alla trioleina, tripalmitina e tristearina) viene portata a condizioni ideali di rendimento con una esecuzione rapidissima e di estrema facilità.

L'azione del vuoto continuato da me applicata alla sintesi dei gliceridi e descritta nella Nota precedente (loc. cit.), appare perciò essenzialmente

(1) Ho provato anche a riscaldare quantità stechiometriche di ac. oleico (3 mol.) e di glicerina (1 molec.), mantenendo il miscuglio reagente esposto all'aria per tutta la durata dell'esperienza. Perchè si abbia una notevole velocità di reazione, bisogna spingersi in tal caso intorno a 250°. Naturalmente la massa reagente si imbrunisce con parziale alterazione della glicerina per opera dell'ossigeno atmosferico. Si giunge in ogni modo, dopo qualche tempo, a neutralizzare il 90 % dell'acido impiegato! Riesce poi laborioso il decolorare e purificare il gliceride in tal modo ottenuto, ed a parte anche il minor rendimento, è naturalmente sempre molto più opportuno di mantenere inerte l'atmosfera sovrastante.

efficace solo in quanto mantiene anche essa un ambiente inerte e garantisce egualmente la continua eliminazione dell'acqua prodottasi nella reazione. Come mostrerò in seguito, in alcuni casi speciali (sintesi diretta di mono e di gliceridi e di gliceridi misti), è pertanto preferibile eseguire l'eterificazione nel vuoto continuato piuttostochè a pressione ordinaria.

Data la notevole importanza, anche industriale, che può assumere questo processo di sintesi nel caso di alcuni gliceridi (es.: trioleina) mi è sembrato interessante di comunicare con carattere preliminare i risultati ottenuti. Rimane così affermato che la sintesi diretta dei comuni gliceridi può effettuarsi, con rendimento pressochè teorico, riscaldando a 200°-250°, a pressione ordinaria, le quantità stechiometriche di acido grasso e glicerina, avendo cura di permettere la continua eliminazione dell'acqua generatasi nella reazione e di allontanare l'ossigeno atmosferico per mezzo di una corrente di gas inerte.

Al contrario di quanto trovasi esposto in tutte le moderne opere di chimica organica la sintesi diretta dei gliceridi rappresenta adunque una fra le più semplici eterificazioni, le cui speciali condizioni rendono anche del tutto inutile l'impiego dei disidratanti, richiesti in tante altre eterificazioni che a prima vista sembrano invece più semplici.

Ed è veramente strano come ogni sperimentatore che si sia occupato della sintesi diretta dei gliceridi, abbia subìto la suggestione delle classiche esperienze di Berthelot, il quale, ponendosi nelle condizioni più laboriose e sfavorevoli, ha voluto includervi delle difficoltà che non esistono menomamente nella pratica dell'esperienza. Scheij, l'unico che in seguito ha radicalmente modificato il metodo di Berthelot, non ha saputo spogliarsi che in parte dell'influenza che sempre ha irraggiato dalle esperienze del grande chimico francese, ed anche esso ha adoperato inutilmente forti eccessi di uno dei reagenti, e si è messo in condizioni tali da far durare l'eterificazione di una certa quantità di glicerina financo tre giorni.

Quanto ho esposto non riguarda del resto che il perfezionamento della sintesi diretta dei gliceridi, della quale spetterà comunque e sempre a Berthelot il merito altissimo di averla per primo realizzata.

Chimica. — *Sopra un caso di isomeria di struttura nei cianuri metallici* (1). Nota di I. Bellucci e G. Sabatini, presentata dal Socio E. Paternò.

In prosecuzione della Nota precedentemente pubblicata: *Sopra un isomero del prussiato rosso* (2), esponiamo le ricerche da noi eseguite sui due ferricianuri di potassio isomeri.

Il β-ferricianuro è stato da noi preparato secondo le indicazioni di Loke ed Edwards (3). La polvere microcristallina verde-oliva, ottenuta pura per ripetute e parziali precipitazioni con alcool, venne per più giorni mantenuta nel vuoto su acido solforico, fino a costanza di peso. Alle determinazioni analitiche a cui l'abbiamo sottoposta fornì risultati concordanti con la formula $Fe\,Cy_6\,K_3\,.\,H_2O$, attribuitagli dagli autori succitati, ed anche il sale d'argento, ottenuto per doppio scambio, risultò possedere la formula anidra $Fe\,Cy_6\,Ag_3$.

Tuttavia, prima di procedere oltre, per meglio caratterizzare il β-ferricianuro, abbiamo compiuto su di esso, sempre in parallelo con l'α-ferricianuro, delle prove iodometriche circa il grado di ossidazione, nonchè delle determinazioni crioscopiche in acqua, esperienze che non erano state eseguite dai due autori americani.

Determinazioni iodometriche:

	Iodio °/o	
	Trovato	Calcolato
α-ferricianuro	38,60	38,46
β-ferricianuro	36,41	36,55

La quantità di iodio posta in libertà dal β-ferricianuro corrisponde nettamente a quella che si calcola per il sale $Fe\,Cy_6\,K_3\,.\,H_2O$ nel passaggio dell'anione $Fe(CN)_6'''$ a quello $Fe(CN)_6''''$.

Determinazioni crioscopiche in acqua. — La soluzione acquosa del β-prussiato si conserva, come abbiamo già detto, inalterata a temperatura ordinaria, per un tempo più che sufficiente per le determinazioni crioscopiche.

	Conc. °/o	Abb. osserv.	P. m. trovato
α-ferricianuro	0,540	0°,11	85
	0,895	0,19	87
	1,676	0,34	90
β-ferricianuro	0,952	0°,20	86
	1,227	0,25	89
	1,580	0,30	97

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Roma.
(2) Vedi questi Rendiconti, fascicolo precedente.
(3) Americ. Chem. Journal, *21*, 193, 413.

Da questi dati si desume che i due prussiati subiscono a forte diluizione acquosa la stessa dissociazione ionica; vale a dire sono quasi completamente dissociati in quattro ioni (calcolato 82).

Formazione del ferroimidoetere. — Come sopra si è detto, entrambi i prussiati isomeri sono stati da noi sottoposti in parallelo alla reazione di Pinner, nelle medesime condizioni di temperatura, di concentrazione e di durata di esperienza.

α-ferricianuro. — L'operazione veniva da noi compiuta con le necessarie precauzioni per evitare l'umidità atmosferica. Il sale ben polverizzato, previamente seccato nel vuoto su acido solforico, veniva sospeso nella quantità di alcool etilico assoluto necessaria per la formazione del ferroimidoetere. All'inizio del passaggio del gas cloridrico ben secco, l'alcool sovrastante assumeva un colore debolmente giallo, nel mentre veniva formandosi una sostanza polverosa bianca (KCl). Per evitare elevazioni di temperatura, il palloncino in cui si compiva l'esperienza era tenuto in acqua corrente. Trascorsa un'ora, durante la quale la corrente di gas cloridrico non fu mai sospesa, e il colore giallo rossastro del prussiato era completamente scomparso, si filtrò rapidamente alla pompa. (Introducendo poi acqua nel palloncino che aveva servito per l'esperienza, si è avuta un'intensa colorazione blu, dovuta alla decomposizione dell'imidoetere). Sul filtro si raccolse il cloruro potassico, che presentava una leggera colorazione bluastra, dovuta ad un po' di imidoetere rimastovi frammisto, e decomposto dall'umidità atmosferica. Dal filtrato alcoolico si separò ben presto abbondantemente il ferroimidoetere in cristalli aghiformi, i quali rapidamente raccolti e lavati con alcool assoluto, vennero posti subito in essiccatore su calce sodata. Quando la massa cristallina apparve ben secca, fu sottoposta a determinazioni analitiche. Il ferro fu dosato allo stato di Fe_2O_3, come residuo di cauto riscaldamento della sostanza: il cloro venne determinato sia col metodo Carius, sia debolmente riscaldando un dato peso di sostanza in tubo ad U in corrente d'aria secca, e raccogliendo opportunamente i vapori d'acido cloridrico: l'azoto col metodo Kjeldahl.

	Trovato				Calcolato per
	I	II	III	IV	$C_{18}H_{41}N_6O_6FeCl_3$
Fe	9,41	—	—	—	9,90
Cl	—	13,70	13,36	—	12,57
N	—	—	—	14,32	14,94

I risultati analitici da noi ottenuti concordano con le percentuali che si calcolano per il ferroimidoetere già descritto e analizzato da Freund (loc. cit),

$$H_3FeC_6\begin{matrix}(NH)_6\\(OC_2H_5)_6\end{matrix}.2HCl\ .$$

È interessante notare subito come le condizioni *anidre* in cui si effettua la reazione di Pinner permettano che il prussiato rosso sopporti l'azione dell'acido cloridrico gassoso senza trasformarsi nell'isomero verde: per cui il ferroimidoetere che ne risulta, riflette realmente la struttura dei sei gruppi cianogeno in quello contenuti.

β-ferricianuro. — Il *β*-ferricianuro, ben secco e polverizzato, fu sottoposto in identiche condizioni alla reazione di Pinner. Sotto l'azione del gas cloridrico, il *β*-prussiato rimase in gran parte indecomposto, ed in parte separò cloruro di potassio, come deposito biancastro. Dal filtrato alcoolico non si ebbe, nemmeno dopo lungo tempo, alcuna separazione di cristalli di ferroimidoetere. (Il palloncino in cui si era fatta l'esperienza, a differenza del caso precedente, lavato all'ultimo con acqua, non dette la caratteristica colorazione bleu intensa, denotante la decomposizione del ferroimidoetere). Parecchie prove ripetute con differenti preparazioni di *β*-sale, dettero sempre eguale risultato negativo. Il *β*-ferricianuro non dà adunque la reazione di Pinner, a differenza dell'*α*-ferricianuro.

Interpretando questo fatto nel modo più semplice e più logico, si è portati a ritenere che l'*α*-ferricianuro, il quale dà così nettamente la reazione di Pinner (trasformazione di un nitrile in imidoetere), abbia in tutti i suoi gruppi cianogeno una costituzione nitrilica, e che, al contrario, i sei gruppi cianogeno del *β*-ferricianuro posseggano la costituzione isonitrilica.

Questa nostra semplice interpretazione è a parer nostro validamente corroborata dall'interessante comportamento differenziale che noi abbiamo potuto constatare nei due isomeri trattati con agenti ossidanti. I due prussiati rispettivamente scaldati in soluzione acquosa con eccesso di persolfato potassico, si decompongono entrambi: l'*α*-sale dà abbondante sviluppo di acido cianidrico; il *β*-sale svolge invece copiosamente vapori di acido isocianico. Questa differenza di comportamento, nettamente rivelabile prima che la demolizione del sale si sia spinta troppo oltre con una prolungata ebollizione, è appunto in stretta relazione con la maggiore facilità ad ossidarsi dei gruppi isonitrilici $-N=C$, da noi attribuiti al *β*-ferricianuro, in confronto a quella dei gruppi nitrilici $-C\equiv N$ dell'*α*-ferricianuro.

Abbiamo perciò che:

l'*α*-ferricianuro: 1°, dà la reazione di Pinner estensibile a tutti i sei gruppi CN; 2°, i suoi gruppi cianogeno non hanno tendenza marcata ad ossidarsi al tipo cianico per ebollizione con persolfato potassico:

il *β*-ferricianuro: 1°, non dà la reazione di Pinner; 2°, i suoi gruppi cianogeno hanno marcata tendenza ad ossidarsi ad acido cianico.

Questo insieme di fatti, a parer nostro, si concilia soltanto ammettendo, come già si è indicato, la costituzione nitrilica $Fe(C\equiv N)_6K_3$ per l'*α*-ferricianuro, e quella isonitrilica $Fe(N=C)_6K_3$ per il *β*-ferricianuro. Ed invero, tutto

il quadro delle conoscenze che si hanno per questi due ferricianuri parla a favore di tale isomerìa di struttura.

Come abbiamo annunciato in principio, ricordiamo che Loke ed Edwards sono riusciti a ritrasformare quantitativamente il β-ferricianuro nell'α-ferricianuro, riducendo il primo con amalgama di sodio a ferrocianuro, e quindi riossidando questo con permanganato potassico. Noi abbiamo osservato che la trasformazione del β-ferricianuro nell'α-ferricianuro può avvenire anche direttamente: basta infatti trattare la soluzione acquosa del primo con idrato potassico, o meglio con ammoniaca, perchè il colore cambi subito dal verde al giallo caratteristico dell'α-ferricianuro, e tale trasformazione avviene in modo integrale. Sembra dunque che, mentre gli ioni idrogeno favoriscono il passaggio dalla forma α(nitrilica) alla forma β(isonitrilica), gli ioni ossidrili effettuano al contrario il passaggio inverso (1):

$$\underset{\alpha\text{-ferricianuro}}{Fe(-C\equiv N)_6K_3} \underset{OH'}{\overset{H^{\cdot}}{\rightleftharpoons}} \underset{\beta\text{-ferricianuro}}{Fe(-N=C)_6K_3}$$

Questo esempio di isomeria di struttura, a quanto noi conosciamo, è il primo che si riscontra nel campo dei cianuri metallici semplici o complessi. Erano bensì noti isomeri di struttura di altro tipo, e specialmente fra i composti metallo-ammoniacali del cobalto (2). Questi ultimi hanno stretta relazione col tipo di isomeria strutturale da noi posto in evidenza, giacchè si riferiscono, invece che a cianuri metallici, a dei solfocianuri, i quali possono, a somiglianza dei primi, egualmente comparire nelle due forme isomere:

Me.CN	CN.Me
Me.SCN	SCN.Me

È interessante notare, però, che, mentre generalmente per questi ultimi è possibile di effettuare la trasformazione di un isomero nell'altro soltanto in un senso (talora per semplice ricristallizzazione), nel caso dei due prussiati isomeri, come si è visto, il passaggio si effettua facilmente dall'uno all'altro

(1) Vedesi da ciò come sia priva di fondamento l'asserzione di Loke ed Edwards (vedi sopra) i quali hanno escluso *a priori* che nel caso in questione potesse trattarsi di un'isomeria strutturale, per il fatto che i due ferricianuri, ridotti con idrogeno nascente, dànno origine allo stesso ferrocianuro. Basta riflettere che i due chimici citati hanno agito sul β-ferricianuro con amalgama di sodio, vale a dire in mezzo alcalino, nel quale caso si ha la sua trasformazione nell'isomero α, e non si può perciò avere come prodotto finale se non lo stesso ferrocianuro.

Indipendentemente da ciò appare a noi problematico che i due ferricianuri isomeri possano per riduzione formare, come asseriscono Loke ed Edwards, un prodotto diverso dal comune ferrocianuro, giacchè non è qui il caso evidentemente di applicare i rigidi criterî che valgono per la riduzione dei nitrili e delle carbilamine organiche.

(2) Vedi Werner, Neuere Anschauungen, loc. cit.

in entrambi i sensi. Questo mutuo passaggio racchiude in sè la trasformazione di un tipo nitrilico (α-prussiato) in isonitrilico (β-prussiato), la qual cosa riesce singolare pensando che generalmente si ammette sieno soltanto le carbilamine a trasformarsi in nitrili.

Il β-ferricianuro rappresenta la forma labile dei due prussiati, ed in corrispondenza con ciò offre una maggiore solubilità a confronto dell'α-ferricianuro.

Sarebbe interessante indagare se l'alterazione che subiscono i cristalli di prussiato rosso da lungo tempo esposti alla luce in recipienti di vetro incoloro sia in relazione col fenomeno di isomeria di cui ci siamo occupati nella Nota presente. Ognuno ha veduto che tali cristalli, specialmente appartenenti a vecchi campioni di sale, si ricoprono di un leggero strato finemente polveroso, di color verde, strato che l'acqua scioglie facilmente pure con colorazione verde, ripristinando il sottostante aspetto rosso del comune prussiato. Non potrebbe la luce effettuare lentamente quella stessa trasformazione isomerica dal prussiato rosso al prussiato verde che abbiamo visto compiersi così facilmente per via chimica?

Terminiamo da ultimo facendo osservare come la blanda reazione di Pinner, la quale ha portato così notevole contributo nelle nostre ricerche, potrà probabilmente estendersi, e con vantaggio, all'indagine della costituzione di altri cianuri metallici. Freund l'ha soltanto applicata al ferro e ferricianuro potassico, ed al platocianuro potassico, ottenendo per quest'ultimo sale un risultato anche più interessante. Egli ha difatti notato che, dei quattro gruppi cianogeno contenuti nel platocianuro $Pt(CN)^4K^2$, due soltanto dànno la reazione di Pinner:

$$Pt(CN)_2 . 2\,HCN \longrightarrow Pt\,C_2 \begin{matrix} (NH)_2 \\ (OC_2H_5)_2 \end{matrix} . 2\,HCN$$

ovvero:

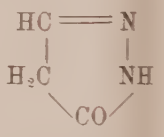
$$Pt(CN)_2 , 2\,HC \begin{matrix} NH \\ OC_2H_5 \end{matrix} ,$$

la qual cosa ben può spiegarsi ammettendo che in uno stesso cianuro doppio possano intervenire gruppi cianogeno di tipo nitrilico (reazione di Pinner) ed altri di tipo isonitrilico, ed ognuno vede da ciò quale fecondo campo di studio potrebbe essere riservato a questo ordine di ricerche.

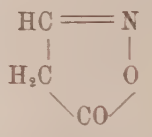
Speriamo tra breve di poter comunicare altri dati sperimentali intorno a questa singolare isomeria dei due prussiati.

Chimica. — *Eterificazione degli iso-oxazoloni con il diazometano* (1). Nota dei dottori E. Oliveri-Mandalà e A. Coppola, presentata dal Corrispondente A. Peratoner.

Gli iso-oxazoloni, per il loro comportamento chimico, mostrano una grande analogia coi pirazoloni

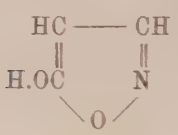


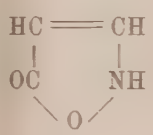
pirazolone

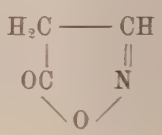


iso-oxazolone

e per tanto si è pensato che, come quelli, potessero gli isoxazoloni reagire nelle tre forme tautomere possibili: cioè, nella forma enolica, nella forma immidica, ed in quella cheto-metilenica:







Nell'intento di portare a questa questione un contributo, abbiamo eterificato il metil- ed il fenil-isoxazolone con il diazometano, come il migliore fra i reattivi per lo studio delle sostanze tautomere, e per la velocità con la quale eterifica, e per le basse temperature alle quali si può operare, e per il solvente stesso (etere anidro), che, per quanto conosciamo, non è capace, di provocare mutamenti intramolecolari.

Uhlenhuth (2) trovò che queste sostanze reagiscono nella sola forma immidica, poichè dai sali di argento, per azione degli ioduri alchilici, l'autore ottenne solamente eteri col radicale legato all'azoto. Quasi contemporaneamente, Raube (3), dall'azione del cloruro di benzoile sul fenil-isoxazolone, otteneva due benzoil- derivati isomeri: uno fondente a 161°, e l'altro a 115°.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Palermo.
(2) Liebig's Ann. *296*, 33; 1897.
(3) Berichte *30*, 1614; 1897.

Nell'eterificazione col diazometano noi abbiamo avuto i seguenti risultati:

Dal metil-isoxazolone abbiamo ottenuto due sostanze: un etere con radicale all'azoto, che fonde a 74°, identico a quello preparato da Uhlenhuth dal sale di argento e ioduro di metile; ed un C-etere, col radicale legato al carbonio, che fonde a 163-164°.

Dal fenil-isoxazolone: un N-etere dal punto di fusione 77-78°, uguale a quello preparato da Uhlenhuth dal sale di argento corrispondente e ioduro di metile, ed un ossi-etere, contenente cioè ossimetile, che fonde a 70°.

È degno di nota che fra quante sostanze contengono l'aggruppamento $— CH_2 — CO —$ non ve n'è alcuna, che, eterificata col diazometano, fornisca, come il metil-isoxazolone, eteri col metile unito al carbonio. La floroglucina [1], l'etere acetacetico [2] ed il fenil-pirazolone [3] reagiscono solamente nella forma enolica.

Gli eteri ottenuti dal metil-isoxazolone provengono dalla condensazione di una molecola di prodotto eterificato con una molecola di metil-isoxazolone.

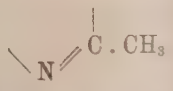
Anche Uhlenhuth ha osservato che, mentre il metil-isoxazolone ha la formula semplice, i suoi sali e gli eteri (dal sale di argento e ioduri alchilici) provengono dalla condensazione di due molecole,

$$2\,C_4H_5O_2N — H_2O = C_8H_8O_3N_2\,;$$

prodotto quest'ultimo che contiene un solo atomo di idrogeno acido, dappoichè fornisce sali con un solo equivalente di metallo ed eteri con un solo metile.

Per quanto noi sappiamo, una tale condensazione, sia nella formazione di eteri, sia in quella di sali, non trova riscontro nella letteratura chimica.

Per ciò che riguarda il modo di formazione di questi sali ed eteri, era ovvio pensare che tali condensazioni potessero interessare il metile dell'isoxazolone

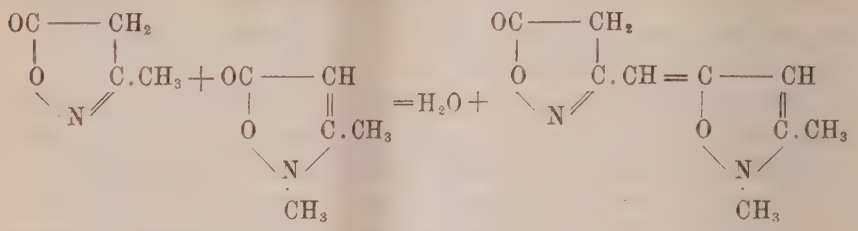


considerando che invece il derivato fenilico, il fenil-isoxazolone, contenente un aggruppamento analogo, entra a formare i sali e gli eteri con la formula semplice.

È noto, infatti, che l'α-metil-piridone, il quale ha un aggruppamento atomico uguale al metil-isoxazolone, si condensa a mezzo del metile laterale con svariate sostanze: aldeidi, chetoni ecc.

(1) Nierenstein, Centralblatt 1906, I, 553.
(2) Pechmann, Berichte *28*, 1626; (1895)
(3) Ibidem.

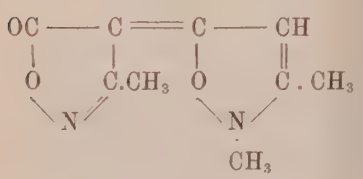
Ma, d'altro canto, un tale andamento della condensazione sarebbe da escludersi, perchè condurrebbe a un composto contenente nella molecola ancora un aggruppamento metilenico,



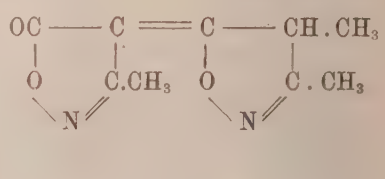
il quale dovrebbe a sua volta essere salificabile ed eterificabile, laddove, come fu detto, non si ricavano che sali monometallici e, secondo le nostre esperienze, eteri monoalchilici.

E non si saprebbe inoltre come giustificare il facilissimo ritorno dai sali alla sostanza di partenza con formula semplice, giacchè il nuovo legame doppio fra i due atomi di carbonio (vera sintesi) dovrebbe conferire ai sali una stabilità tale da fornire, per sola acidificazione, non l'isoxazolone semplice, ma il suo prodotto di condensazione libero.

Contro simile difficoltà urterebbe un'altra interpretazione della condensazione, ammettendo cioè che questa avvenga fra il gruppo chetonico della sostanza eterificata ed il metilene della sostanza di partenza, e che quindi ai due eteri ottenuti spettino le formule seguenti:



p. f. 74°



p. f. 163°

Noi per il momento lasciamo in sospeso tale questione, potendo si cercare anche interpretazioni differenti da quelle dianzi esaminate, nelle quali però farebbe giuoco l'atomo di ossigeno del nucleo ed una conseguente apertura di questo; e ci proponiamo di istituire altre esperienze per la risoluzione di questo problema.

γ. Metil-N. metil-isoxazolone.

Gr. 1,5 di metil-isoxazolone si introducono a piccole quantità in una soluzione eterea concentrata di diazo-metano, ottenuto da 10 cc. di nitroso-metiluretano. Dapprima conviene raffreddare con ghiaccio, perchè lo sviluppo

di azoto è abbastanza vivo; ma in seguito esso va gradatamente diminuendo, e verso la fine diventa lentissimo. Quando si è aggiunta tutta la quantità dell'isoxazolone, si svapora la soluzione eterea, la quale è colorata ancora in giallo per l'eccesso di diazo-metano contenuto. Rimane così un olio denso, leggermente colorato, il quale solidifica stando lungo tempo in essiccatore su acido solforico o quasi subito fregando contro le pareti del cristallizzatore con una bacchetta di vetro. Un piccolo saggio della sostanza con percloruro di ferro non diede la colorazione caratteristica bleu-inchiostro, caratteristica degli isoxazoloni; una prova, quindi, che tutta la sostanza si era eterificata. Per separare i due eteri isomeri formatisi nell'eterificazione, si estrae a caldo ripetutamente con etere di petrolio il prodotto della reazione. Gli estratti eterei, per concentrazione, abbandonano dei piccoli prismi quadrati, i quali, cristallizzati dall'etere di petrolio, fondono a 74°. Essi sono solubili in alcool ed etere. Bolliti con potassa, svolgono metil-ammina, la quale, raccolta in soluzione acquosa di acido cloridrico, è stata caratterizzata dal suo cloroplatinato. Ciò prova che l'alchile è attaccato all'azoto.

All'analisi la sostanza ha dato numeri concordanti con la formula $C_9H_{15}O_3N_2$:

gr. 0,1803 di sostanza diedero cc. 21,7 di N a 12° e 759^{mm}.

	Calcolato	Trovato
N %	14,43	14,22

Una determinazione di peso molecolare in benzolo ha dato:

gr. 0,1541 di sostanza, sciolti in gr. 15.985 di benzolo, ne abbassarono il punto di congelamento di 0°,26:

K del benzolo = 50

Peso mol. calc. per $C_9H_{15}O_3N_2$	Trovato
194	185

Questo etere è perciò, sotto tutti gli aspetti, identico a quello preparato da Uhlenhuth dal sale di argento del metil-isoxazolone e joduro di metile.

γ. Metil-C. metil-isoxazolone.

La parte insolubile in etere di petrolio, e dalla quale fu separato l'etere all'azoto, cristallizza dall'acqua in piccolissimi aghi i quali fondono a 163-164°. La sostanza, trattata con gli alcali concentrati ed a caldo, non sviluppa metil-ammina. Con acido iodidrico, nell'apparecchio di Zeisel, non fornisce CH_3I, e perciò deve considerarsi come un etere al carbonio.

È insolubile in etere di petrolio e nell'etere ordinario (a freddo); poco solubile in alcool e benzolo.

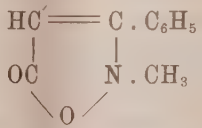
All'analisi:

1) gr. 0,1617 di sostanza fornirono cc. 20 di N a 14° e 762^{mm}.
2) gr. 0,1696 di sostanza diedero gr. 0,3403 di CO_2 e gr. 0.0796 di H_2O.

Su 100 parti:

Calcolato per $C_9H_{10}O_3N_2$		Trovato	
		1	2
C	55,66	—	54,88
H	5,15	—	5,20
N	14,43	14,52	—

γ . Fenil-N . metil-isoxazolone.



Il prodotto da eterificare, il fenil-isoxazolone, è stato preparato per azione dell'idrossilammina in soluzione alcalina sull'etere fenil-propiolico, seguendo le indicazioni di Ruhemann e Cunnington (1).

L'eterificazione è stata condotta come per il metil-isoxazolone. La massa cristallina rimasta, dopo l'eterificazione. per evaporazione del solvente, fu estratta con etere di petrolio, il quale, a caldo, asporta l'etere col metile all'azoto.

Infatti questa sostanza, cristallizzata dall'etere di petrolio, fonde a 77-78° e si mostra identica all'etere preparato da Uhlenhuth, eterificando con alcool ed acido solforico il fenil-isoxazolone.

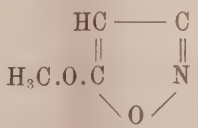
È facilmente solubile in alcool, benzolo, etere, e cloroformio. Con potassa, sviluppa *metil-ammina.*

Una determinazione di azoto ha dato:

gr. 0,2201 di sostanza fornirono cc. 14,5 di N a 13° e 759^{mm}.

Calcolato per $C_{10}H_9O_2N$	Trovato
N % 8,00	7,75

γ . Fenil-O . metil-isoxazolone.



La parte insolubile nell'etere di petrolio, e da cui si è separato l'etere precedente, si cristallizza dall'alcool acquoso. Si ottengono così degli aghetti setacei i quali fondono a 70°. La sostanza contiene l'ossimetile. Essa è insolubile in acqua e nell'etere solforico, poco solubile in benzolo, solubile nell'alcool.

(1) Chem. Soc. *75*, 954.

All'analisi:

1) gr. 0,2115 di sostanza svilupparono cc. 14,3 di N a 14° e 754^{mm}.

2) gr. 0,1901 di sostanza fornirono nell'apparecchio di Zeisel gr. 0,2661 di AgI, corrispondenti a gr. 0,0351 di OCH_3.

Su 100 parti:

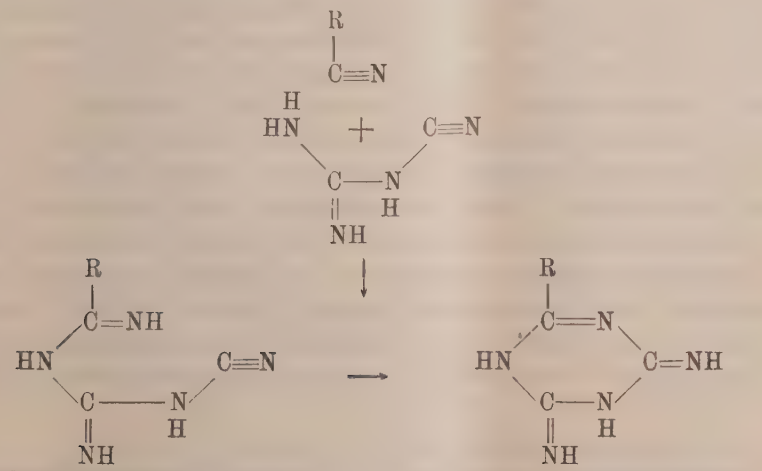
	Calcolato per $C_{10}H_9O_2N$	Trovato I	Trovato II
N	8,00	7,80	—
$-OCH_3$	17,71	—	18,47

Chimica. — *Azione dei nitrili sulla cianguanidina.* Nota preliminare di A. Ostrogovich, presentata dal Socio E. Paternò.

Nel precedente lavoro ho dimostrato che l'acetamidina e la benzamidina si condensano colla cianguanidina dando origine rispettivamente alla metil- e alla fenil-diamino-triazina. Spero che questa reazione potrà applicarsi anche ad altre amidine, sia acicliche che ariliche, costituendo così un nuovo metodo generale di sintesi per le diamino-triazine.

Colla presente Nota desidero far noto che si può comodamente sostituire alle amidine suddette, i nitrili corrispondenti. È noto infatti che anche i veri nitrili hanno la proprietà di addizionare sostanze contenenti il gruppo ($-NH_2$), dando origine alle amidine, amidossime, ecc.; e poichè la cianguanidina, oltre al gruppo nitrilico, possiede anche un gruppo aminico, si poteva prevedere che, facendo reagire la cianguanidina coi nitrili, si sarebbe avuta una doppia addizione, con formazione diretta della diamino-triazina.

Infatti, adoperando l'acetonitrile ed il benzonitrile (corrispondenti alle amidine impiegate nella sintesi precedente), la reazione procede nel modo previsto e si può rappresentare cogli schemi seguenti:



(Prodotto intermediario non isolato)

oppure la sua forma tautomera

Ho fondate speranze, come esporrò in seguito, che anche questa reazione potrà generalizzarsi e costituire perciò un altro nuovo metodo di sintesi per la diamino-triazine.

Con questo secondo metodo si avrebbe il vantaggio, in confronto dell'altro, di non aver bisogno di preparare precedentemente le amidine che, come si sa, richiedono un tempo abbastanza lungo, anche impiegando l'eccellente metodo del Pinner (1).

Accennerò inoltre che questi due metodi di sintesi per la diamino triazine, mi sembrano costituire una prova di più per la formola cianguanidinica della diciandiamide, proposta e discussa, per la prima volta, dal Bamberger (2).

Metil-diamino-triazina.

Condensazione della cianguanidina coll'acetonitrile. — Grammi 3 di cianguanidina e 3 c. c. di acetonitrile (calcolati 1.5) si scaldano per tre ore circa in tubo chiuso, alla temperatura di 225°-230°, facendo in modo che la sostanza raggiunga questa temperatura nel più breve tempo possibile.

Aprendo il tubo, dopo raffreddamento, non si osserva che un leggero odore di ammoniaca. Per aggiunta di un po' d'etere etilico, si può togliere completamente la sostanza dal tubo e filtrarla alla pompa (circa gr. 3,7 di prodotto greggio). Dopo ciò, si polverizza il più possibile e la si fà bollire, un po' di tempo, con circa 300 c. c. d'acqua, per la qual cosa si estrae una parte solubile e ne rimane indietro un'altra assai poco solubile, anche a caldo. Lasciato raffreddare il tutto, si mantiene così ancora un paio di giorni, agitando di tanto in tanto il pallone, per facilitare la separazione di una piccola quantità di quel prodotto poco solubile, che si era disciolta durante l'ebullizione. Questa sostanza così poco solubile, separata per filtrazione, ha molti dei caratteri dell'ammelina; è solubile tanto negli acidi minerali diluiti, quanto negli idrati alcalini; dalla soluzione acida si precipita neutralizzando con ammoniaca, e dalla soluzione alcalina acidificando con acido acetico. Si scioglie a caldo nel carbonato di sodio e si riprecipita per raffreddamento. Riscaldata sulla lamina di platino, dà fumi bianchi e brucia senza dare accenno di fusione. Ho creduto però inutile di purificare e analizzare questo prodotto secondario, non avendo esso per me alcun interesse.

La soluzione acquosa, separata da questo prodotto, si fa evaporare a bagno-maria fino a piccolo volume, e quindi si lascia freddare. Si ottiene, così, una massa cristallina, che si spappola bene con un pistillo, dopo avervi aggiunto un paio di centimetri cubi di una soluzione concentrata di idrato

(1) *Die Imidoäther und ihre Derivate*, Berlin, 1892.

(2) E. Bamberger, *Tesi di laurea*. Berlino. 1880; e Ber., 16, pag. 1074 e 1462 (1883).

sodico, a fine di sciogliere quel po' di ammelina che potesse esservi mescolata; indi si filtra alla pompa, comprimendo bene la sostanza per liberarla completamente dal liquido. Non è consigliabile di lavare la sostanza, sia pure con poche goccie d'acqua, perchè in questo modo si hanno perdite molto più considerevoli. Perciò si fa sciogliere, nella minor quantità possibile d'acqua bollente, la sostanza così semplicemente pressata, e si lascia cristallizzare lentamente. In questo modo si ottiene la metil-diamino-triazina cristallizzata in laminette incolore lucenti, che, una volta asciugate, pèrdono dopo poco tempo l'acqua di cristallizzazione, e si trasformano in una polvere bianca (gr. 2). Dalle acque madri, per concentrazione, si può avere ancora un mezzo grammo di base, pesata anidra, per cui il rendimento totale ammonta a circa il 56 per cento del teorico. Però, tenendo conto delle perdite inevitabili che si hanno, soprattutto lavorando con poca quantità di una sostanza molto solubile com'è la metil-diamino-triazina, io credo di poter affermare che questa cifra potrebbe essere aumentata di qualche unità lavorando con una quantità maggiore di prodotto.

L'identificazione della base è stata fatta in questo caso cogli stessi mezzi adoperati nel caso precedente.

Fenil-diamino-triazina.

Condensazione della cianguanidina col benzonitrile. — Grammi 3 di cianguanidina, ben secca e ben polverizzata, e gr. 5 di benzonitrile (calc. gr. 3,66) si scaldano in tubo chiuso a 190°-200°, durante quattro o cinque ore. All'apertura del tubo non si avverte pressione alcuna, ma si sente un leggero odore d'ammoniaca, mescolato a quello di mandorle amare che è dovuto all'eccesso di benzonitrile adoperato. Versando nel tubo un miscuglio (all'incirca in parti uguali) di etere etilico e di etere di petrolio si può togliere completamente la sostanza e filtrarla alla pompa, liberandola in questo modo dall'eccesso di benzonitrile. Il prodotto così ottenuto si scioglie quindi in acido cloridrico diluito, caldo, e, senza bisogno di filtrare per separare un po' di polvere bruna insolubile, si decolora con carbone animale e si filtra. Aggiungendo a questa soluzione, dopo averla lasciata raffreddare completamente, un piccolo eccesso di idrato sodico, si precipita la fenil-diamino-triazina sotto forma di fiocchi cristallini, che si raccolgono alla pompa e si lavano con acqua fredda. È preferibile, in questo caso, di adoperare l'idrato sodico, piuttosto che il carbonato, perchè si elimina così, fin da principio, la maggior parte dell'ammelina, che si forma in questa reazione a differenza di quella descritta nella Nota precedente. Per essere sicuri che tutta l'ammelina si sia completamente eliminata, è bene di spappolare, in un piccolo mortaio, con un po' di soluzione di idrato sodico, la base precedentemente filtrata alla pompa. Dopo aver raccolto di nuovo, alla pompa, la

base così trattata, e averla lavata con acqua fredda, la si fà cristallizzare dall'acqua bollente. Si ottengono così aghettini sottili, perfettamente identici a quelli descritti precedentemente. Essi fondono infatti, tanto soli che mescolati con la base ottenuta seguendo le indicazioni dell'Elzanowski, a 225°.

Il rendimento in base pura è di circa il 60 per cento del teorico.

* * *

Ho detto in principio di avere fondate speranze che questa reazione possa essere generale; difatti, in questo ultimo tempo, il sig. Craifaleanu, occupandosi, dietro mio invito, della continuazione di queste ricerche (1), è riuscito ad ottenere, dal *p. tolunitrile* e cianguanidina, una sostanza che somiglia moltissimo, per l'aspetto e le sue proprietà, alla fenil-diamino-triazina e che deve essere la *p. tolil-diamino-triazina*, prodotto sconosciuto finora. D'altra parte, condensando il fenilacetonitrile con la cianguanidina, ha ottenuto, con fortissimo rendimento, la *fenilacetoguanamina* (*benzil-diamino-triazina*) descritta dall'Elzanowski, ma che egli ottenne con un rendimento di appena l'8 per cento del teorico.

Prima di terminare mi preme di render noto fin d'ora che, in seguito ad alcune esperienze preliminari, parrebbe che nelle sintesi sopraddette (descritte in questa Nota e nella precedente) si possa sostituire la biguanide alla cianguanidina, come la teoria farebbe prevedere. Difatti, scaldando un miscuglio equimolecolare di cloridrato di benzamidina e di acetato di biguanide, sono riuscito ad ottenere la *fenil-diamino-triazina*, identica a quella preparata coi metodi precedenti. Però in questo caso il rendimento è molto scarso, probabilmente a causa della facilità con cui la biguanide si decompone, riscaldandola a temperature alquanto elevate. È probabile perciò, che questa modificazione delle sintesi precedenti non avrà importanza pratica, anche perchè la biguanide si prepara sempre con una certa difficoltà, per quanto io sia riuscito, come ho recentemente pubblicato (2), ad ottenere un rendimento doppio di quello che si ha col metodo di Bamberger e Dieckmann (3). Per altro questa nuova modificazione ha una certa importanza teorica, poichè spero di poterla generalizzare adoperando, invece della biguanide, la guanilurea, il biureto e gli altri composti analoghi.

Infatti, scaldando quantità equimolecolari di cloridrato di benzamidina e acetato di guanilurea, ho potuto ottenere, con discreto rendimento, la *fenil-amino-oxi-triazina* (benzoguanide dell'Elzanowski) che questi ha preparato pel primo (4), per azione dell'acido nitroso sulla benzoguanamina.

Mi riservo perciò di continuare lo studio di queste reazioni e prego quindi i colleghi di lasciarmi per un certo tempo questo campo di ricerche.

(1) Questo studio servirà al sig. Craifaleanu come tesi per la laurea in chimica.

(2) A. Ostrogovich, *Quelques données nouvelles sur la préparation de la biguanide*, Bull. Soc. d. Sc. de Bucarest, XIX, 641 (1910).

(3) Monatsh. f. Ch. X, 87 (1899).

(4) Vedi la sua tesi di laurea, pag. 22.

Chimica. — *Sali doppi fra il fluoruro di piombo e gli altri sali alogenati dello stesso metallo* (1). Nota di Carlo Sandonnini, presentata dal Socio G. Ciamician.

Il sistema $PbBr_2$ — $PbFl_2$.

Questo sistema è analogo al precedente. La miscela eutettica nella parte del diagramma $PbBr_2$ — $PbBr_2 \cdot PbFl_2$ giace a 7,5 mol. % e alla temperatura di 349°; ancor più che nel sistema precedente eutettico va abbassandosi verso la concentrazione del sale doppio $PbBr_2 \cdot PbFl_2$ (fig. 2, tabella II).

Tabella II.

Molecole % di $PbFl_2$	Temperature di cristalliz. primaria	1° arresto	Durate in secondi	2° arresto	Durate in secondi	3° arresto	Durate in secondi
0	366	—	27	—	—	—	—
2,5	358	349	50	—	—	—	—
5	?	349	81	—	—	—	—
7,5	eut.	349	63	—	—	—	—
10	422	350	45	—	—	—	—
15	469	349	26	—	—	—	—
20	499	348	26	—	—	—	—
30	533	346	17	—	—	—	—
40	551	329	8	—	—	—	—
45	555	305	—	—	—	—	—
50	561	—	—	—	—	—	—
55	558	—	—	—	—	—	—
60	551	—	—	533	16	—	—
70	543	—	—	533	32	—	—
75	eut.	—	—	533	61	—	—
77,5	570	—	—	540	44	—	—
80	585	—	—	—	—	585	120
85	633	—	—	—	—	584	70
90*	690	—	—	—	—	585	60
95*	756	—	—	—	—	584	60
100*	824	—	—	—	—	—	—

Le miscele a 2,5 e a 45 mol. % di fluoruro hanno durate eutettiche normali e pare assai probabile che queste si riducano a zero ai componenti e che cioè tanto il bromuro quanto il sale doppio $PbBr_2 \cdot PbFl_3$ cristallizzino puri dalle miscele fuse.

Nella parte del diagramma $PbBr_2 \cdot PbFl_2$ — $PbBr_2 \cdot 4\,PbFl_2$ la miscela fusa a 75 mol. % di fluoruro deposita eutettico puro, che a 60 ha brevissima durata e scompare a 55 %, per estrapolazione dalla curva delle durate

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

eutettiche, queste si riducono a zero a 56 % di fluoruro analogamente al sistema precedente. Così pure $PbBr_2 \cdot 4PbFl_2$ è un composto decomponibile per fusione la cui temperatura di formazione coincide col massimo che ad esso composto spetterebbe a 585°. La curva di raffreddamento della miscela

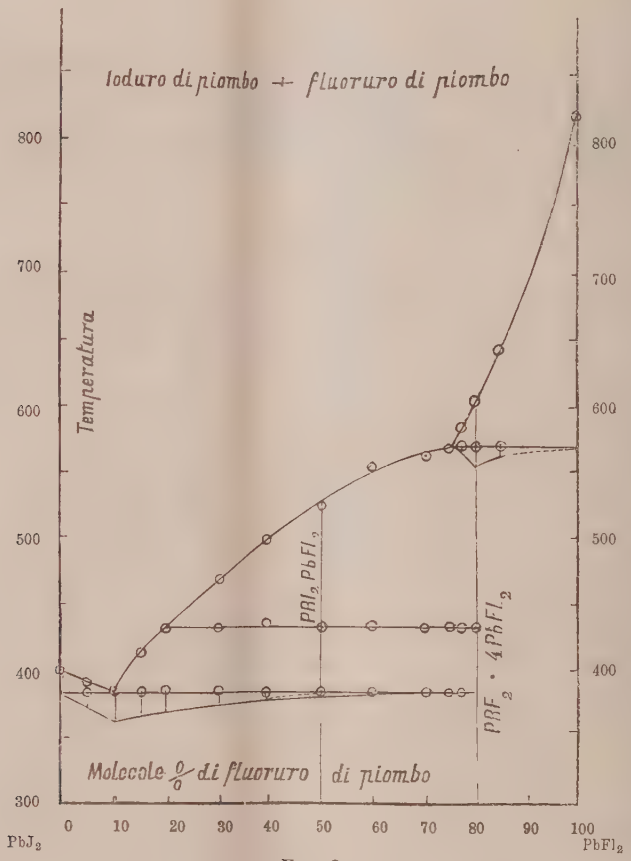


Fig. 2.

della concentrazione di questo composto ha un solo punto di arresto, e contrariamente al caso precedente non si ha più traccia di eutettico.

Nella fig. 2 i segmenti perpendicolari alla orizzontale $b\,b'$ sono proporzionali alle durate di cristallizzazione a 585°.

Il sistema $PbI_2 — PbFl_2$.

Dalle curve di raffreddamento delle miscele dei due componenti risulta un diagramma ben diverso dai due precedenti (tabella III, fig. 3).

Tabella III.

Molecole °/₀ di $PbFl_2$	Temperature di cristalliz. primaria	1° arresto	Durate in secondi	2° arresto		3° arresto	Durate in secondi
0	400	—	—	—	—	—	—
5	392	383	29	—	—	—	—
10	eut.	383	50	—	—	—	—
15	413	384	38	—	—	—	—
20	432	383	40	—	—	—	—
30	470	384	27	434	—	—	—
40	498	383	25	434	—	—	—
50	523	383	22	432	—	—	—
60	555	384	15	434	—	—	—
70	564	384	—	432	—	—	—
75	568	384	—	434	—	—	—
77,5	584	384	—	433	—	573	16
80	606	—	—	432	—	573	33
85	644	—	—	—	—	573	16
100	824	—	—	—	—	—	—

La curva di cristallizzazione primaria si abbassa dal punto di solidificazione dello joduro fino a 10 mol. °/₀ di fluoruro in un punto eutettico alla temperatura di 383°. Per concentrazioni maggiori di fluoruro la curva si innalza fino a 432° e a 20 mol. °/₀ ove si nota un debole gomito indi sale a 573° e a 76,5 mol. dove si ha un gomito evidentissimo indi sale rapidamente al punto di solidificazione del fluoruro puro. Le curve di raffreddamento delle miscele da 20 a 77,5 mol. °/₀ di fluoruro dànno oltre all'arresto di prima cristallizzazione e a quello eutettico, un punto di arresto a 432°. Per concentrazioni superiori di fluoruro l'arresto eutettico scompare; ma ancora a 80 mol. °/₀ è visibile il punto a 432.

Le curve di raffreddamento delle miscele da 77,5 mol. di fluoruro in poi dànno, oltre all'arresto di cristallizzazione primaria, uno fisso a 573°. La durata massima dell'arresto a questa temperatura giace a 80 mol. °/₀ e va diminuendo verso il 76,5 da una parte e verso il fluoruro puro dall'altra, e senza dubbio coincide con la concentrazione di un composto non stabile alla fusione, e corrispondente al sale doppio $PbI_2 \cdot 4\,PbFl_2$.

Le durate di arresto a 432° non possono essere calcolate con esattezza data la loro brevità; ma gli arresti sono più visibili e netti a 40, 50, 60 mol. °/₀ di fluoruro, alle altre concentrazioni questo punto si nota nelle curve di raffreddamento con deboli rallentamenti. Da ciò e per analogia coi due sistemi precedenti è lecito supporre che questa temperatura di arresto spetti ad un composto $PbI_2 \cdot PbFl_2$ decomponibile per fusione.

Contro questa affermazione sta il fatto che, data l'esistenza di questo composto, la temperatura di formazione di esso e quella eutettica a 383° si notano a concentrazioni di molto superiori a quelle che loro spetterebbero,

e quindi potrebbe supporsi che l'arresto a 432° spettasse a una trasformazione allo stato solido del composto $PbI_2 . 4\,PbFl_2$, ma questa supposizione è resa impossibile dal fatto che questo si nota appena a 80 mol.%, mentre dovrebbe essere massimo e a 85 mol. non si avverte più.

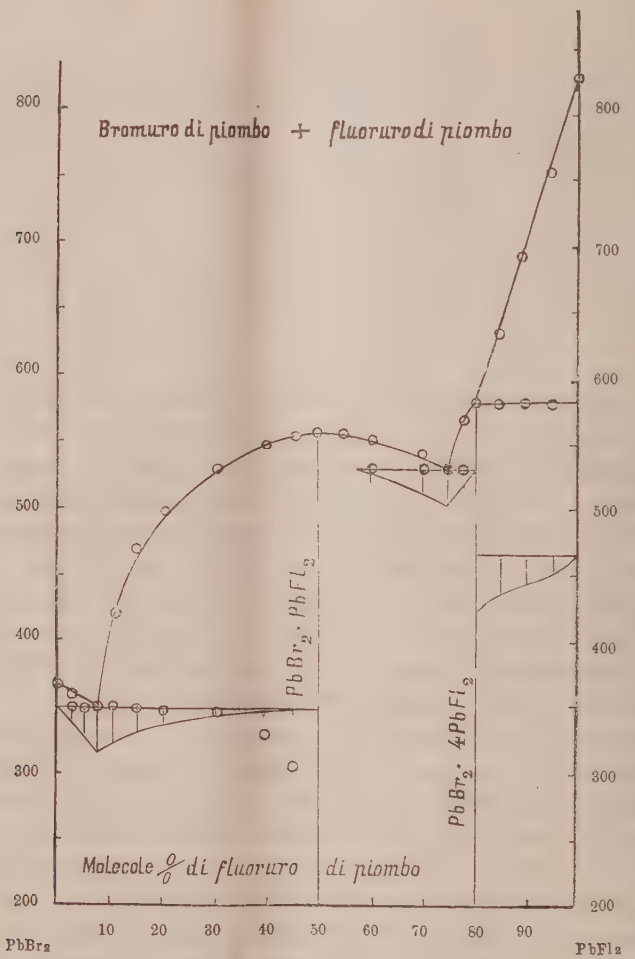


Fig. 3.

Si è notato come anche nel sistema $PbCl_2$ — $PbFl_2$ l'eutettico compaia alla concentrazione del composto $PbCl_2 \cdot 4\,PbFl_2$: questi casi anomali vennero già completamente studiati da Tamman (1), e da Ruer nel suo trattato.

(1) Tamman, Zeitsch. f. anorg. Chemie, *45*, 1905, pag. 24.

Casi analoghi sono dati frequentemente da leghe metalliche; per miscele di sali un altro esempio si ha nel sistema cloruro potassico — cloruro di piombo (1).

Conclusione.

Ho dunque dimostrato che il fluoruro di piombo dà cogli altri sali alogenati di piombo due tipi di composti $PbFl_2 \cdot PbX_2$ e $4\,PbFl_2 \cdot PbX_2$. Pei composti del primo tipo si potrebbe discutere se spetti ad essi la formula doppia o quella semplice $Pb<^{Fl}_{Cl}$, come la attribuì Fonze-Diacon (loc. cit.) ai composti da lui ottenuti per via umida. L'analisi termica non può naturalmente decidere questioni di tal genere. L'esistenza dei composti del secondo tipo fa parere più opportuno scriverli tutti come composti molecolari.

Petrografia. — *Fase hawaiana dell'attività dell'Etna* (2). Nota del dott. G. Ponte, presentata dal Socio Struever.

Dall'ultima eruzione del marzo-aprile 1910 l'Etna si è mostrato in una calma apparente, perchè di tanto in tanto ha dato dal cratere centrale delle manifestazioni abbastanza importanti, dalle quali risulta che se grandi emissioni di lava non si sono più avute, però questa deve trovarsi oggi molto in alto nel camino eruttivo.

In una escursione fatta il giorno 11 maggio 1910 sulla cima estrema del vulcano, fu osservato che delle grandi frane avevano allargato la bocca del cratere centrale rendendone l'orlo tutt'intorno inaccessibile e pericoloso.

Durante l'autunno dello stesso anno il cratere restò in perfetta quiete. Verso la fine del dicembre si notarono delle deboli fumate grigie che annunziavano un nuovo risveglio: difatti, il giorno 27, nelle prime ore del mattino, fu visto da Catania tutto l'orizzonte dell'Etna tinto di una luce rossastra, mentre il cratere centrale vomitava lentamente lava accompagnata da sprazzi di luce vivissima.

Al sorgere del giorno si videro sul lato meridionale del cono centrale due piccole colate che rimasero a far vivo contrasto fra il candore della neve, anche in seguito alle nevigate dei giorni successivi.

Dopo questo primo trabocco di lava il vulcano non si acquietò; delle abbondanti emissioni di vapori biancastri continuarono a tenerne chiomata la cima, finchè la sera del 25 gennaio 1911, verso le ore 21, fu visto da

(1) R. Lorenz u. W. Ruckstuhl, Zeitsch. f. anorg. Chemie, *51*, 1906, pag. 7.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Vulcanologia della Università di Catania.

Catania un vivo bagliore di fuoco sul cratere centrale, ma ben presto un nuvolone oscuro, incombendo sulla città, ne velò ogni vista.

L'indomani mattina tutti i tetti delle case e i davanzali delle finestre si trovarono coperti da un lieve strato di sabbia nera, non tanto sottile da confondersi con la cenere che suole essere eruttata dall'Etna; questa sabbia era formata da piccoli granuli e da esili filamenti, che il prof. Bucca per il primo notò essere in tutto simili a quelli emessi dal Kilauea, ed a tutti i vulcanologhi noti col nome di « capelli di Pelè », dato ad essi dagli indigeni delle isole Hawaiane. Nel Kilauea, questi fili capillari si formano per stiramento del vetro basaltico (jalomelano) che viene proiettato nelle esplosioni delle fontane ardenti, tanto caratteristiche, di quel cratere. Ivi i capelli di Pelè sono lunghi anche un metro: quelli dell'Etna caduti a Catania, raramente arrivano a pochi centimetri di lunghezza; però bisogna tenere presente lo sminuzzamento che essi avran sofferto nel percorso di circa 20 km. dal cratere centrale fino a questa città.

Questo interessante fenomeno viene ora osservato per la prima volta sull'Etna. Però è da notare che nella ultima eruzione del marzo-aprile 1910 si ebbero forti esplosioni di tipo stromboliano e stramboliano misto, dai crateri esplosivi distribuiti lungo la fenditura, mentre che dalle bocche ove avveniva l'emissione della lava si avevano deboli esplosioni intermittenti, con proiezioni di scorie pomicee in modo da avvicinarsi ad un tipo quasi hawaiano. Invece i fenomeni che si sono svolti in questo ultimo risveglio eruttivo sembra corrispondano ad una vera attività hawaiana.

I detriti filamentosi sollevati a poca altezza dal cratere centrale e spinti dal vento fino a Catania ed oltre la sera del 25 gennaio, presentano tutte le forme caratteristiche dei capelli di Pelè descritte e disegnate dal Krukenberg (1) e di quelli del Kilauea posseduti dall'Istituto di Mineralogia e Vulcanologia dell'Università di Catania, con i quali si son potuti confrontare. Taluni sono degli esili filamenti, del diametro da mm. 0,05 a mm. 0,50, di varia lunghezza da 1 fino a 5 centimetri; altri hanno la forma di clave, di lacrime, di fascetti sfibrati, di reticolati poligonali spesso riuniti da membrane simili ad alette di mosca, di gabbiette, di uncini, di scheggie con frattura concoide, e di moltissime altre forme quanto mai complicate.

Le membrane e le scheggie sottili sono molto trasparenti, mentre i filamenti sono di color bruno-oscuro ed hanno delle nervature longitudinali. Visti per riflessione, presentano delle iridescenze interne dovute alle bollicine gassose incluse; tra i nicols incrociati restano sempre inattivi. I filamenti vetrosi sono completamente privi di inclusioni cristalline; però si trovano dei piccoli granuli costituiti da frammenti di feldspato circondati da sostanza vetrosa.

(1) G. F. W. Krukenberg, *Mikrographie der Glasbasalte vom Hawaii; petrographische Untersuchung*, pag. 38. Tübingen, 1887.

Secondo l'ipotesi del Brigham (1), i capelli di Pelè si formano per azione del vento sulle fontane di lava spruzzanti nel lago di fuoco del Kilauea. Il Silvestri (2) ritiene invece che siano spruzzi di materia fusa, che, pur allontanandosi rapidamente dalla massa che li produce, rimangono da un lato attaccati ad essa.

Agronomia. — *Le rocce e le acque dell'Agro Romano rispetto alla calce.* Nota di G. DE ANGELIS D'OSSAT, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Da quanto ho esposto precedentemente intorno alle rocce della Campagna Romana risulta all'evidenza la scarsezza relativa della *calce* (CaO) nella loro composizione. Molte esperienze, eseguite col calcimetro di Scheibler, sopra lave e tufi vulcanici della regione mi diedero costantemente valori minimi o quasi nulli. La *calce* nelle nostre rocce è contenuta specialmente dai feldspati plagioclasici, dall'augite, dalle miche, dalla leucite, dall'haüyna, dalla melilite, dai granati, dalla gismondina, dall'apatite ecc. La media di 14 analisi di lave leucititiche risulta di 10.90 % per la *calce*. Questo elemento nei tufi vulcanici oscilla fra valori inferiori a quello delle rispettive lave. Devesi però notare che nella *calce* menzionata è pur compresa la parte non solubile in acido cloridrico, quella cioè che costituisce la *ricchezza* di un remoto avvenire. La *calce* solubile in H Cl rappresenta generalmente, per quanto apprendo dagli analisti, meno di un terzo della totale contenuta.

Le analisi chimiche dei terreni agrari della Campagna Romana sono scarse e quelle che furono eseguite raramente portano la determinazione geolitologica esatta e non dichiarano la natura *autoctona* o *di trasporto*, per modo che solo in casi particolari posso trarne partito. Il Bechi (in Pareto) assegna alla *calce*, nei terreni certamente autoctoni, valori che oscillano fra 0,870 — 1,045 %; di poco superiori ci fornisce il Viola ed altri. Nullameno la *calce* vi si trova sempre e specialmente allo stato poco solubile, a causa della notevole resistenza che oppongono generalmente alla decomposizione i minerali con Ca.

***

Per riconoscere la quantità di *calce* disponibile nelle diverse contingenze, sotto forma di *potenza* e di *ricchezza* prossima, nelle rocce dell'Agro, le quali, per affioramento e per elevazione nella scala stratigrafica, costituiscono comunemente il terreno agrario *autoctono*, ho intrapreso l'esperimento di cui presentemente rendo conto.

(1) Vedi Zirkel, *Petrographie*, Bd., III, pag. 97, an. 1894.

(2) O. Silvestri, *Sopra alcune lave antiche e moderne del Kilauea. Studî petrografici.* Boll. com. geol. d'Italia, XIX, 1888, pag. 128.

Le rocce scelte e soggettate all'esperienza furono, in ordine cronologico discendente:

I. Pozzolanelle della Vigna Jannetti, sulla Via Ardeatina (Livello superiore);

II. Pozzolane grigie (nere) della Marranella (Livello medio);

III. Pozzolane rosse di Pratolungo, sulla Via Tiburtina (Livello inferiore);

IV. Tufo terroso della salita di Malagrotta, alla destra del Tevere.

Di ciascuna roccia (che menzionerò, per brevità, solo col numero romano corrispondente) ho preso dei campioni uguali e li ho sottoposti, per un intero anno (1 Aprile 1908-1 Aprile 1909) a sei condizioni diverse rispetto alle acque e cioè:

1. Stato naturale (per confronto);
2. All'aria libera ed alla *pioggia*;
3. All'adacquamento (Mercoldì e Sabato) con acqua *distillata* del commercio;
4. All'adacquamento (id.) con acqua *Paola*;
5. All'adacquamento (id.) con acqua *Felice*;
6. All'adacquamento (id.) con acqua *Acetosa*, presso Ponte Molle (Milvio).

Le acque rappresentano tutti i tipi delle nostre rispetto alla diversa quantità di contenuto minerale: non si adoperarono le correnti in superficie, perchè troppo suscettibili ai cambiamenti nella composizione chimica.

I materiali allo stato naturale servono acconciamente di paragone; il medesimo ufficio avrebbero avuto i campioni trattati con acqua distillata, se questa in commercio avesse la purità voluta.

Rimando, per la completa conoscenza della composizione chimica delle rocce e delle acque prese in esame, alle conosciute analisi di tanti analisti, contentandomi ora di riferire solo i seguenti dati, perchè indispensabili alla intelligenza di quanto sarà esposto.

(Trottarelli in Verri)	Peso specifico	CaO in acido cloridrico:		Totale
		Solubile	Insolubile	
Pozzolanelle, Via Ardeatina. . .	2.35	1.15 %	3.88 %	5.03 %
Pozzolane grigie, T. Caffarella .	2.16	2.37 »	6.18 »	8.54 »
Pozzolane rosse, S. Paolo . . .	2.33	1.89 »	6.63 »	8.52 »

Acque	CO^2 in centomillesimi	CaO in centomillesimi	Residuo 100°	Durezza in gradi francesi		
				Temporanea	Permanente	Totale
Paola . . .	8.16	3.91	27.80	8.94	2.86	11.80
Felice . . .	18.760	13.72	43.84	26.89	2.47	29.36
Acetosa . .	in lit. gr. 1.32300	Ca. = 0.25110	20.42 (m.)	—	—	—

I saggi di roccia furono posti in piccoli vasi di terra ben cotta, dopo averli tenuti in bagno di acido cloridrico allungato sino a termine di effervescenza. Dopo un'accurata levigazione, quattro dei vasi furono collocati all'aperto, perchè ricevessero le piovane e subissero le vicissitudini meteoriche. Gli altri si adacquarono regolarmente, sino a completa tenuta, con le acque menzionate, per un periodo di un anno, nei giorni di mercoldì e sabato.

Passati sei mesi, i campioni furono sottoposti, presso la R. Stazione Agraria sperimentale di Roma, al calcimetro (a volume). L'operazione fu eseguita a 14° C. e con gr. 10 di roccia. Tutti i saggi rivelarono traccie di carbonato di calcio; in quantità relativamente notevole si trovò nelle rocce adacquate con la Felice e con l'Acetosa e cioè:

	A. Felice	A. Acetosa
I	gr. 0.151 %	gr. 0.161 %
II	» 0.151 »	» 1.010 »
III	» 0.151 »	» 0.892 »
IV	» 0.252 »	» 1.060 »

Gl'inaspettati risultati m'invogliarono a proseguire l'esperimento per un intero anno, dopo il quale, col noto metodo Rose (a peso) ho trovato i valori che riferisco nella Tabella I. Il metodo usato, adoperando l'acido cloridrico diluito, opportunamente pone in evidenza la *calce* tenuta in potenza e ricchezza prossima. È preferibile di molto il sistema Rose all'uso del calcimetro di Scheibler, indicando questo troppo incertamente il quantitativo dei carbonati. I valori ottenuti debbonsi ritenere, nel nostro caso, come esatti; dacchè la *magnesia* è contenuta nelle rocce sperimentate in minime quantità e poi essa sostituisce agrariamente, per piccole quantità, la *calce*.

I dati sono riferiti a carbonato di Calcio, ottenendosi dall'esperienza il peso, per differenza, dell'anidride carbonica. La temperatura si tenne fra 14°-16° C: il materiale adoperato si trovò fra 2-4 grammi.

Tabella I.

Campioni	Stato naturale	Piovana	A. distillata	A. Paola	A. Felice	A. Acetosa
I	0.540	0.804	0.786	0.776	0.925	1.495
II	0.744	0.909	2.290	1.227	0.800	1.638
III	0.615	0.827	1.620	0.571	0.638	2.481
IV	0.602	0.366	0.879	1.000	1.236	2.584

Costruite le grafiche seguenti (v. fig. 1) s'inferisce, con maggiore evidenza, l'importante conclusione:

Tutte le acque adoperate aumentano il quantitativo solubile della calce, contenuta nelle rocce sperimentate, aumentandone considerevolmente la potenza.

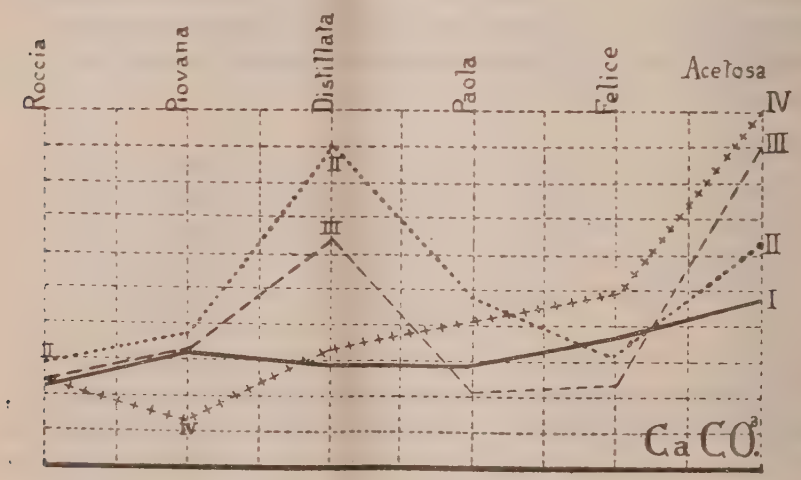


Fig. 1 — I numeri romani rappresentano i campioni.
Equidistanza: orizzontali mm. 5; verticali mm. 10.

Rispetto alla quantità di *calce* elaborata così (Tabella II) debbonsi classificare le acque in ordine decrescente. Nella stessa tabella figurano le somme e le medie di aumento di carbonato di Calcio delle quattro rocce e delle stesse nelle cinque condizioni diverse.

TABELLA II.

Campioni	Aumento di $CaCO^3$ nell'acqua:					Per campione	
	1 Acetosa	2 Distillata	3 Felice	4 Paola	5 Piovana	Totale	Media
I	0.955	0 246	0.385	0.236	0.264	2.086	0.417
II	0.894	1.546	0.056	0.483	0.165	2.144	0.429
III	1 866	1.005	0.023	— 0.044	0.212	3.248	0.648
IV	1.982	0.277	0.634	0.398	— 0.236	3.055	0.611
Totale	5.697	3.074	1.098	1.073	0 405		
Media	1.424	0.768	0.274	0.268	0.101		

Vedansi i due seguenti diagrammi dove si trovano rappresentati gli aumenti totali, in rapporto di valore assoluto, nelle singole condizioni dei quattro campioni (v. fig. 2) e degli stessi quattro campioni (v. fig. 3).

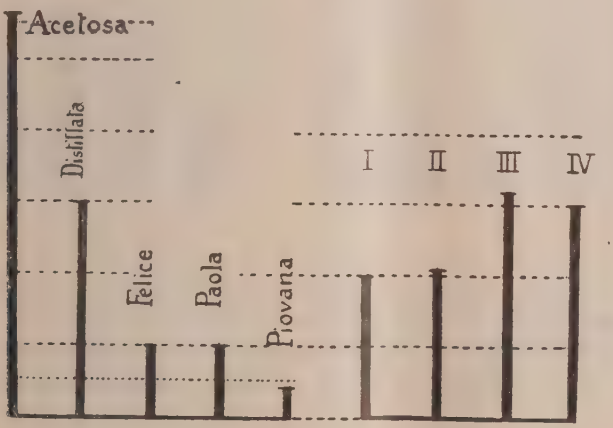


FIG. 2.

FIG. 3.

Con un facile calcolo si possono apprezzare le quantità di carbonato di Calcio che le singole acque mettono in disponibilità, nel corso di un anno, in un *ha.*, considerando la profondità di m. 0.50 ed ammettendo per le rocce il peso specifico medio di 2,3.

TABELLA III.

Campioni	Aumento di $CaCO^3$ per *ha.* in Q. per le acque:					Per campione	
	1 Acetosa	2 Distillata	3 Felice	4 Paola	5 Piovana	Totale	Media
I	1098.25	282.90	442.75	271.40	303.60	2398.90	479.78
II	1028.10	1777.90	64.40	555.45	189.75	3615.60	723.12
III	2145.90	1155 75	26.45	— 50.60	243.80	3521.30	704.26
IV	2279.30	318 55	729.10	457.70	— 241.40	3543.25	708.35
Totale	6551.55	3535 10	1262.70	1284.55	465.75		
Media	1637.88	883.77	315.67	321.13	116.43		

I seguenti diagrammi mostrano graficamente le quantità totali del carbonato di Calcio messo a disposizione, nel corso di un anno, per le singole acque (v. fig. 4) e per i diversi campioni (v. fig. 5), secondo i dati sperimentali, in un *ha.*

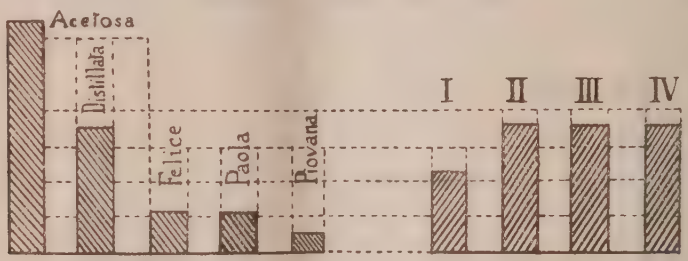


FIG. 4.

FIG. 5.

L'aumento è per sè considerevole e tale da giustificare la feracità di parecchi terreni autoctoni dell'Agro: disgraziatamente però tanto tesoro, a causa della sua estrema mobilità, fu spesso asportato dalle acque, quasi nella totalità.

Ancora è degno di nota il confronto fra le due serie di medie (v. Tabella III): mentre fra i campioni v'ha quasi una identità, meno il più superficiale; per le diverse acque si ebbero valori disparatissimi, fra 116.43 e 1637.88.

* * *

Le complesse composizioni chimiche delle rocce e delle acque in studio e specialmente lo stato di profonda alterazione, anche congenita, degli elementi litologici e mineralogici non permettono un'indagine esattissima sul-

l'origine dei fenomeni verificatisi nell'esperienza; tuttavia è dato risalire lungo la concatenazione ininterrotta delle cause e degli effetti sino a scoprire i principali agenti operatori.

Non v'ha dubbio alcuno che il quantitativo di carbonato di Calcio minore del primitivo, trovato nel IV campione esposto all'aria (v. Tabelle II e III), dimostra che le piovane esportarono una notevole quantità (più della metà) del sale fuori del vaso per mezzo dello sgocciolamento durante le incessanti ed abbondanti pioggie autunno-invernali.

D'altra parte il quantitativo salino maggiore dell'iniziale rinvenuto negli altri campioni I, II e III, per quanto non elevatissimo, sta a constatare che un aumento fu sicuramente prodotto. Dai due fatti precedenti si deduce che le pluviali elaborano una quantità di *calce* e che sono pur capaci di asportarne. Il medesimo ragionamento calza all'acqua Paola ed a tutte le altre con cui si sperimentò.

Che l'agente elaborante non sia semplice può congetturarsi dalle svariate attività ben note delle pluviali, tra le quali debbonsi ricordare l'affinità chimica dell'acqua quando è scevra di residuo solido, quando ha disciolto CO^2 ed altri elementi con Az ecc.

A provare direttamente l'azione dell'acqua e dell'anidride carbonica, mi soccorre opportunamente il ricordo di una esperienza, che presenta analogia con la mia, del Giorgis e del Gallo sopra tre sabbie vulcaniche vesuviane, tenute per *due mesi* in acqua, facendovi gorgogliare una corrente di CO^2. Ecco i risultati centesimali rispetto alla *calce*:

	I. Eruzione 1878	II. Eruz. maggio 1900	III. Eruz. nov. 1900
Prima dell'esperienza.	12.09	8.89	9.71
Dopo l'esperienza . .	15.09	9.95	9.92
Differenza in più . .	3.00	1.06	0.21

Riguardo al potere solutivo dell'acqua si ricordano specialmente le ricerche del Cossa, dell'Engel, del Ville, del Bischof, del Neminar, del Sestini, ecc.

Anche la natura opera in modo da dimostrarci chiaramente la verità di quanto si asserisce.

L'acqua Paola, con poco residuo fisso e con scarsissima *calce*, ha dato per le stesse rocce, quasi uguali effetti della Felice, ricca di residuo fisso e con abbondantissima *calce*. Tutte e due le nominate acque elaborando e concedendo inaspettatamente meno *calce* della distillata e dell'Acetosa, dimostrano che la presenza di CO^2 e la purezza dell'acqua sono due energici distruttori delle rocce. Nè maraviglia il comportamento della distillata del commercio, portando essa sempre disciolta l'anidride carbonica in considerevoli quantità, rispetto ad altri elementi che pur non vi mancano.

Senza dubbio, se le altre acque fossero state soverchiamente abbondanti, avrebbero anch'esse rimosso, come la piovana, una parte della calce elaborata, impoverendone la roccia.

Per le nostre rocce adunque, rispetto al quantitativo della *calce*, *sono più energiche produttrici fra le acque sperimentate, quelle che ne contengono meno in composizione*. L'importanza della constatazione emerge dal solo enunciato.

In ogni modo chiaramente risulta la giustezza della legge da me già formulata intorno all'irrigazione: il principio sopra cui essa è fondata rimane ora saldamente confermato dall'esperienza. Ecco la legge: « Il terreno « agrario deve potere assorbire tutta l'acqua pluviale, ad esso poi ne va « somministrata per irrigazione, quanta ne può mantenere; nell'uno e nel- « l'altro caso non debbonsi avvivare correnti che allontanino l'acqua, insieme « alle materie fertilizzanti elaborate ».

Patologia vegetale. — *Sulla batteriosi del pomodoro* (*bacterium Briosii* n. sp.). Nota preliminare del dott. G. L. Pavarino, presentata dal Socio G. Briosi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Batteriologia agraria. — *Sopra i metodi di misura delle attività microbiche del terreno agrario*(1). Nota di R. Perotti, presentata dal Socio G. Cuboni.

Deve ascriversi a singolare merito di Th. Remy la proposta di esaminare batteriologicamente il terreno coltivabile con la misura delle sue principali funzioni microbiche anzi che con la semplice e primitiva numerazione dei germi contenutivi.

Il metodo della numerazione dei germi presenta un grande numero di inconvenienti per i quali fu oggetto di critiche più o meno gravi che contribuirono ciononpertanto a migliorarlo; ricordo, anzi, come io stesso proponessi già altra volta di modificarlo coll'impiego dell'estratto di torba glucosato all' 1 % (2), ottenendo con ciò resultati che per le possibili deduzioni batteriologico-agrarie presentavano un valore superiore a tutti quelli precedentemente ottenuti.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Batteriologia agraria della R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

(2) R. Perotti, *Per l'esame bacteriologico-agrario del terreno*. Rend. Acc. Lincei, vol. XVI, fasc. 1, genn. 1907.

Ma il principio di mettere in evidenza le proprietà batteriche a mezzo delle soluzioni sopra il quale il Remy ha inteso di basare il suo nuovo metodo di esame del terreno, si presenta sotto una veste di maggiore attendibilità e trova riscontro in procedimenti che sono antichi quanto la stessa batteriologia, e forse più, poichè è nello stesso ordine di idee che in ultima analisi il Leeuwenhoek svolgeva i suoi studî sopra gli *infusorii* delle acque putrescenti. Il Winogradsky, molto più tardi, per il suo celebre isolamento dei nitroso- e dei nitrobatterii, si valeva di materiale proveniente da culture in liquidi selezionanti (1); il Beyerinck, seguendo una via parallela, perveniva all'isolamento di parecchie specie di batterii oligonitrofili e segnatamente alla descrizione del suo *croococco* (2).

Il tentativo dello Jensen, eseguito nell'anno 1899, per misurare le proprietà nitrificanti di alcune terre della Danimarca (3), trovò sviluppo ed illustrazione nelle ricerche sistematiche estese poco dopo dal Remy al potere di denitrificazione ed a quello di ammonizzazione del terreno, dalle quali venne più propriamente tratta la tecnica del metodo (4).

Il Remy determinava il potere di ammonizzazione inoculando con gr. 10 di terreno da esaminarsi cmc. 100 di soluzione di peptone all' 1 % e distillando l'ammoniaca prodotta dopo 4 od 8 giorni di coltivazione a 20 C.; il potere di nitrificazione dosando per via colorimetrica l'acido nitrico prodottosi nella soluzione di Omeliansky, parimenti inoculata; il potere di denitrificazione innestando con il 10 % di terra la soluzione di Giltay e calcolando il tempo occorso per la scomparsa della reazione del nitrato; il potere di fissazione dell'azoto elementare valendosi della soluzione del Beyerinck alla mannite con aggiunta del 15 % di terra. Erano istituite prove di controllo con campioni di terreno di determinata provenienza ed attitudine produttiva.

Ma tale sistema di procedimento dette motivo ben presto ad osservazioni per parte di non pochi autorevoli sperimentatori che ne proposero modifiche.

Alle prime ricerche del Löhnis (5) seguì un lungo ed elaborato studio dell'Ehrenberg) il quale, in confronto dei resultati ottenuti con prove di vegetazione, osservava che nel metodo non si tiene sufficiente conto della forma dei recipienti come della umidità della aereazione e della reazione del ter-

(1) Arch. des sciences biolog. de Saint-Petersbourg, VII, 1899, pag. 191.

(2) M. W. Beyerinck, *Ueber oligonitrophyle Mikroben.* Centr. f. Bakt., II, VIII (1902), pag. 567.

(3) Tidsskrift for Landbrugets Planteavl., Bd. 5: *Salpeterbakteriernes Utbredelse i Danmark*, pag. 173.

(4) Th. Remy, *Bodenbakteriologische Studien*, Centr. f. Bakt. II, VIII (1902), pag. 660.

(5) F. Löhnis, *Ein Beitrag zur Methodik der bakteriologischen Bodenuntersuchung.* Cent. f. Bakt. II, XII (1904), pp. 262, 448; XIV, pag. 1.

reno (1). Alcune critiche di questo autore si riferiscono ai metodi delle analisi chimiche occorrenti. Con una Nota posteriore egli richiama inoltre in particolare l'attenzione sopra il fatto delle perdite di azoto nelle soluzioni di peptone in putrefazione (2).

Buhlert e Fickenday trovarono il difetto del metodo nella differente quantità di azoto che si introduce con la inoculazione delle prove a mezzo del terreno e nel fatto che con la piccola quantità del materiale di innesto non può esattamente misurarsi la composizione e la virulenza della flora batterica contenutavi (3). Eglino introducono nel metodo una modificazione notevole impiegando per l'innesto, in luogo del terreno, un *estratto* di esso ottenuto agitando per cinque minuti parti uguali di terra e di acqua di condottura. Ciò permette a loro di ottenere risultati molto concordanti.

Tale variante alla primitiva tecnica venne accettata da altri autori i quali ne ammisero gli indiscutibili vantaggi e fra questi anche dallo stesso Remy in una sua recentissima Nota, nella quale ha particolarmente studiato le questioni sollevatesi intorno alla misura del potere di ammonizzazione (4): dal Löhnis che nega un generale potere di putrefazione del terreno ed esperimenta l'impiego per i singoli casi di varie sostanze putrescibili, quali peptone Witte, Schering, Merck, farina d'ossa, di corno e di sangue (5); al Lippmann che ottiene concordanze completamente soddisfacenti fra i dati del metodo e quei delle prove di campo ed esperimenta anche l'albumina e la caseina invece del peptone (6); al Vogel ed al Zeller che si dichiarano assolutamente contrarii all'impiego del peptone, per gli inconvenienti che esso presenta della troppo facile scomponibilità, della troppa dipendenza di questa dalle oscillazioni termiche, dagli errori analitici causati dal peso del corpo batterico (7).

Avversario ancora più dichiarato del metodo è O. Rahn che pone in rilievo i facili errori derivanti dalle perdite dei liquidi culturali per volatilizzazione, dall'influenza della soluzione nutritiva che supera quella del ma-

(1) P. Ehrenberg, *Die bakterielle Bodenuntersuchung in ihrer Bedeutung für die Feststellung der Bodenfruchtbarkeit.* Ladw. Jahrb., vol. XXXIII.

(2) P. Ehrenberg, *Stickstoffverluste in faulenden Peptonlösungen: ein Beitrag zur Methodik der bakteriellen Bodenuntersuchung.* Centr. f. Bak. II, XV (1905), pag. 54.

(3) Buhlert u. Fickendey, *Zur Methodik der bakteriologischen Bodenuntersuchung.* Centr. f. Bakt., II, XVI (1906), pag. 399.

(4) Th. Remy u. G. Rösing, *Beitrag zur Methodik der bakteriellen Bodenuntersuchung.* Centr. f. Bakt. II, XXIX (1911), pag. 36.

(5) F. Löhnis u. A. E. Parr, *Zur Methodik der bakteriologischen Bodenuntersuchung*, III. Cent. f. Bakt. II, XVII (1907), pag. 518.

(6) *Report of the Soil Chemist and Bacteriologist* (XXVI Annual report of the New Jersey State Agric. Exp. Stut.), Cent. f. Bekt. II, XVIII, 22/23.

(7) Vogel u. Zeller, *Beiträge zur Methodik der bakteriologischen Bodenuntersuchung.* Mitt. a. d. Kaiser-Wilhelms-Institut für Landw. in Bromberg. Ed. I (1908), h. 2, pag. 167.

teriale di innesto, il quale, del resto, può modificare sensibilmente la soluzione stessa con le sostanze minerali che vi aggiunge; infine, perchè nessun criterio può trarsi dal procedimento sul numero dei germi del terreno e sopra la loro caratterizzazione (1). Il Rahn conclude che il giudizio della fertilità di una terra possa ottenersi molto più rapidamente e completamente a mezzo dell'analisi chimica.

Il Remy, nella sua ultima pubblicazione risponde alle varie obbiezioni di sopra esposte e sperimentalmente dimostra, nei riguardi del potere di putrefazione, l'influenza esercitata sopra la misura di questo dalla composizione chimica del terreno che serve da innesto, nonchè l'influenza che sopra la medesima esplica il *clima-terreno* (reazione, aereazione, umidità, calore, sostanze acceleranti o ritardanti, ecc.); e tenendo conto dei progressi che le numerose ricerche dei collaboratori e dei critici avevano indotto nella tecnica del metodo, avanza ulteriori proposte di migliorie di esso (impiego di gelatina purissima per le prove di ammonizzazione) il cui razionale fondamento non può ritenersi in alcun modo scosso. La persuasione di ciò, acquistata dai migliori studiosi, ha spinto taluni di questi a tentare una via parallela ed affine, stabilendo le migliori condizioni per seguire il circolo dell'azoto, non più nelle soluzioni, ma nel terreno stesso aggiungendo ad esso la materia prima per attivarlo. In tale ordine di idee rientrano gli studî del Lemmermann e collaboratori (2), del Koch e del Pettit (3) e recentemente del Vogel (4).

La discussione è quindi ancora aperta e per la sua importanza alimenta studî e ricerche dirette ad affrettare migliori conclusioni. E poichè io stesso negli studî che ho in corso sopra la biologia dei terreni dell'agro romano, ho avuto occasione di eseguire parecchie centinaia di esami batteriologici seguendo appunto il metodo del Remy, deve ritenersi non inutile l'esposizione di quei risultati che formano oggetto della presente Nota e che possono maggiormente illustrarlo, contribuendo a risolvere i problemi che si presentano allorchè si voglia fissarne definitivamente la tecnica.

Durante il mio studio mi attenni alle modalità fissate dalle recenti ricerche del Barthel (5): per il procedimento seguìto, allo scopo di evitare

(1) O. Rahn, *Bakteriologische Untersuchungen über das Trocknen des Bodens.* Centr. f. Bakt. II, XX (1908), pag. 38.

(2) O. Lemmermann, H. Fischer, H. Kappen u. E. Blank, *Bakteriologisch-chemische Untersuchungen.* Landw. Jahrb., 38 (1909), pag. 319.

(3) A. Koch u. Pettit, *Ueber die verschiedenen Verlauf der Denitrification im Boden und in Flüssigkeiten.* Centr. Rakt., II, XXVI (1910), pag. 335.

(4) Vogel, *Beiträge zur Methodik der bakteriologischen Bodenuntersuchung.* Cent. f. Bakt. II, XXVII (1910), pag. 593.

(5) Chr. Barthel, *Bodenbakteriologische Untersuchungen.* Cent. f. Bakt, II, XXV (1909), pag. 108.

ripetizioni, rimando alla precedente Comunicazione fatta nella seduta del 18 dicembre u. s. (1). Riunirò i resultati a seconda delle principali funzioni microbiche del terreno agrario, avvertendo che per quanto riguarda il processo di fissazione dell'azoto elementare non ho potuto fare alcuna nuova constatazione.

I. *Potere di ammonizzazione.* — Nell'esame dei numerosi dati ricavati dalle misure del potere di putrefazione del terreno, in funzione dell'epoca dell'anno e della diversità dei terreni, mi fu permesso di rilevare una circostanza di particolare interesse. Eseguendo la misura in due periodi equidistanti dell'anno ottenni questi risultati:

	NH_3 mmgr. per litro	
	gennaio	luglio
	1.19	1.00
	1.27	0.98
	1.15	0.95
	1.32	0.92
Media . . .	1.23	0.95

Eseguendo la misura sopra terreni di natura differente, nel mese di gennaio, i resultati furono i seguenti:

	NH_3 mmgr. per litro:			
	T. calcare-argilloso profondo	T. argilloso-calcare profondo	T. argilloso-umoso di media profondità	T. argilloso poco profondo
	1 27	1.34	1.36	1.03
	1.27	1.36	1.29	1.10
Media . .	1.27	1.35	1.32	1.06

Tali esempî, che ho scelto fra i molti che avrei potuto addurre, indicano due fatti principalmente: 1°) che i dati forniti dalla misura del potere di ammonizzazione del terreno, sperimentata provocando la putrefazione del peptone, possono presentare oscillazioni non molto sensibili per circostanze di fatto ben differenti, quali negli esempî riportati, sono quelle che si verificano per uno stesso terreno nel colmo dell'estate e nel colmo dell'inverno o in terreni differenti nella stessa epoca dell'anno. Una tale circostanza acquista maggior valore qualora si tengano presenti le differenze molto più sensibili che si ottengono determinando i poteri di nitrificazione e di denitrificazione. 2°) Che risultati di misure di uguale valore, o quasi, possono ottenersi da terreni di natura affatto differenti, come ad es. sono quelli da me sopra riportati e che si riferiscono in un caso a terre ricche di calcare (Saccopastore); nell'altro a terre ben provviste di sostanze umose, ma quasi prive

(1) R. Perotti, *Il movimento del capitale-azoto nei terreni della campagna romana.* Rend. Acc. Lincei, vol. XIX, 2° sem., fasc. 12.

di calce (Romavecchia, presso il Casale). La misura del potere di ammonizzazione, adunque, ottenuta nelle circostanze del metodo, di cui sopra, con i suoi reperti poco oscillanti, non può essere indice della composizione chimica dei terreni.

II. *Potere di nitrificazione.* — Altre notevoli osservazioni mi permettono di fare i dati raccolti sopra il potere di nitrificazione dei terreni della campagna romana.

Esaminando il valore del potere di nitrificazione ottenuto da uno stesso terreno in epoche opposte dell'anno, troviamo differenze più sensibili di quelle del potere di ammonizzazione. Così i reperti seguenti:

	HNO_3 mmgr. per litro.	
	gennaio	luglio
	0.025	0
	0.014	0
	0.030	0
	0.015	0
Media . . .	0.021	0

dimostrano come nel mese di luglio si ottenesse una nitrificazione nulla e nel mese di gennaio di mmgr. 0.021 per litro. Le medie dei valori tanto per la nitrificazione, quanto per l'ammonizzazione, furono massime nel gennaio (1); prendendole perciò = 100, avremo in un caso differenza del 100 per 100 nell'altro di circa il 20 %. Molti altri resultati, però, ottenuti per uguali terreni, ed anzi per identici campioni, hanno posto in evidenza circostanze che debbono attribuirsi alle modalità di esecuzione del metodo. Ad es., per la tenuta di Boccone, nel terreno di valle appartenente al fosso della Cecchina, ottenni:

	HNO_3 mmgr. per litro	
	nella parte soda	nella parte lavorata
massimo : . .	0.020	0.055
minimo . . .	0.005	0.009

Si tratta perciò di differenze molto rilevanti, in base alle quali può affermarsi che le condizioni realizzate nella esecuzione del metodo di misura non sono le migliori.

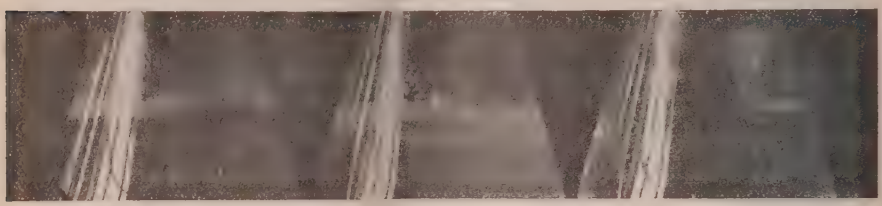
I resultati del potere di nitrificazione di due terreni della tenuta di Romavecchia, molto vicini, di ugual natura ma con differente contenuto in sostanza organica furono i seguenti:

	HNO_3 mmgr. per litro	
	(sost. org. 10,5 %)	(sost. org. 8.8 %)
	0.035	0.015
	0.035	0.025
Media . . .	0.035	0.020

Essi indicherebbero come in presenza di maggiori quantità di sostanza organica, che è ritenuta condizione sfavorevole per la nitrificazione, questo processo sarebbe più attivo che non in presenza di quantità minori di *humus*. Un tale fatto ha punti di contatto con un altro accertato nella misura del potere di denitrificazione e che appresso esaminerò.

III. *Potere di denitrificazione.* — La misura del potere di denitrificazione viene espressa con quella del tempo occorso per la totale scomparsa del nitrato dal liquido di Giltay e perciò in modo meno rigoroso di quello con il quale vengono espresse le misure delle altre funzioni microbiche del terreno agrario. Tuttavia, i numerosi dati da me raccolti, permettono di confermare i resultati dei precedenti esperimentatori: secondo i quali, il metodo permette di rilevare differenze notevoli nelle proprietà denitrificanti dei diversi terreni.

Mi trovo però in grado di mettere in evidenza i tre casi molto differenti che possono verificarsi anche nelle culture allestite con uno stesso campione di terra, secondo i migliori precetti del Barthel. Nell'esame della parte della tenuta di Romavecchia, situata a nord della via Casilina, fra il suburbio e la tenuta del Quarticciolo, ottenni i tre casi che tipicamente sono rappresentati dalle seguenti figure:



Nella prima Erlenmeyer si ebbe una vera denitrificazione con la totale scomparsa del nitrato; nella seconda si ebbe denitrificazione parziale (indiretta), incompleta ancora dopo 308 ore di cultura, senza alcuno sviluppo di azoto; nella terza non si ebbe affatto denitrificazione, ma solo un principio di sviluppo quasi subito cessato. Con il metodo di misura, quindi, non si apprezza la denitrificazione indiretta e si confonde questa con l'assenza di sviluppo (che indico parimenti con il segno ∞) nel calcolo della media delle numerose prove che in speciale considerazione di tale fatto si rende necessario istituire.

Più interessante ancora mi sembra ciò che risulta dai seguenti reperti analitici:

(1) Cfr. loco citato nella nota precedente.

Ore occorse per la totale denitrificazione della soluzione di Giltay	Nei terreni
96	Prati fiscali, sost. org. = 12.55 %
120	Boccone » » = 7.05 »
192	Romavecchia » » = 7.00 »

Essi furono scelti fra i molti che dimostrerebbero come, di regola, in terreni ricchi di sostanza organica, che è causa favorevole del fenomeno, si avrebbe una capacità di denitrificazione maggiore che non in quelli che ne sono più scarsamente forniti. Però, tali resultati ottenni appunto in terreni (come, ad es., quello dei Prati Fiscali) per i quali la lunga pratica agricola ha dimostrato una fertilità ben superiore a quella posseduta dagli altri, nei quali, invece, il metodo in discussione avrebbe svelato una minore capacità denitrificante. Una tale circostanza, che trova riscontro nell'altra poco sopra rilevata per la nitrificazione, mi sembra di non poco momento nell'apprezzare il giusto valore dei risultati ottenuti con il metodo del Remy: entrambi poi sembrano un poco prestarsi alla discussione dei concetti acquisiti sopra le condizioni dei fenomeni di nitrificazione e di denitrificazione che hanno luogo nel terreno agrario.

In un terreno moderatamente provvisto di sostanza organica, che è tra i fattori principali della fertilità del suolo, è mia ipotesi, che la maggior parte delle forme microrganiche — comprese le nitrosanti nell'areola mineralizzata come immaginò il Winogradsky — si trovino in uno stato di attività maggiore che non nei terreni meno forniti della sostanza organica medesima. Ciò avverrebbe perchè in genere le condizioni di esistenza dei microrganismi, anche in forza della loro grande capacità adattativa, sono comprese entro limiti relativamente ampî, sicchè essi possono benissimo prosperare in mezzi diversi, più o meno ricchi, senza peraltro indurre quei fenomeni (in genere fermentativi) che il metodo di misura in discussione mira a porre in evidenza realizzando le condizioni più favorevoli a tali fenomeni e che non sono quelle possedute dal terreno da cui le forme provengono. Così, ad esempio, può avvenire che i denitrificanti, come nei casi da me riportati, posti nella soluzione di Giltay, denitrificano attivamente, mentre la sperimentata fertilità starebbe a dimostrare che ivi una tale denitrificazione non avviene. Mi sembra perciò che il giudizio sulla attendibilità dei resultati del metodo vada soprattutto subordinato alla realizzazione nelle culture di quel complesso di condizioni (*clima-terreno* del Remy) che il terreno offre ai microrganismi e non a quelle che sono offerte dalle soluzioni; che, in seconda linea — in relazione alle altre cause di errore dalle presenti mie ricerche poste in luce — mi sembra anche che si debba convenientemente aumentare

il numero delle prove parallele dalle quali trarsi la media, insieme con la adozione di processi analitici sicuri e spediti, e, per quanto riguarda il potere di putrefazione del terreno, ricorrere ad una sostanza che si presti meno rapidamente all'attacco dei germi.

Il Rahm, che è tra i più dichiarati avversarii del metodo, è di opinione che l'analisi chimica possa bastare di per sè sola a dare quelle indicazioni a cui tenderebbe il metodo del Remy per la misura delle attività microbiche del terreno. Credo, invece, che i miglioramenti che questo metodo è capace di subire, specie sulla base di quelli proposti dal Lemmermann, dal Kock, dal Pettit e dal Vogel, permettano di affermare con sicurezza che esso rappresenta una buona conquista della moderna tecnica degli studî di batteriologia agraria.

Fisiologia. — *Contributi alla fisiologia del Labirinto.* I. *L'ergogramma della rana slabirintata* (1). Nota del dott. M. Camis, presentata dal Corrispondente V. Aducco.

La dottrina del tono labirintico fondata dall'Ewald (2), si basa principalmente sopra considerazioni intuitive, ossia sopra la semplice osservazione di animali slabirintati.

L'analisi dei rapporti, che corrono fra il labirinto ed i muscoli, e lo studio sperimentale di questo tono labirintico mancano quasi del tutto. I soli tentativi in questo senso appartengono pure all'Ewald ed alla sua scuola, e si possono riassumere brevemente. Riferendo esperienze compiute in parte da lui ed in parte dal Willgerodt per suo suggerimento, l'Ewald (3) descrive una posizione asimmetrica assunta dal cadavere di piccioni slabirintati monolateralmente, la quale deriverebbe dalla maggiore rapidità con cui la musculatura del lato operato entra in rigidità cadaverica.

Più tardi l'Emanuel (4), partendo da una esperienza dell'Ewald comunicata nel 1893 alla Società di scienze e medicina di Strasburgo, eseguì

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Pisa.

(2) R. I. Ewald, *Physiologische Untersuchungen über das Endorgan des Nervus octavus*. Wiesbaden 1892.

(3) J. R. Ewald, *Zur Physiologie des Labyrinths*; V. Mitth., *Die Beziehungen des Tonuslabyrinths zur Todtenstarre und über die Nysten'she Reihe* (Pflüger's Arch., 1896, LXIII, pagg. 521-541).

(4) G. Emanuel, *Ueber die Wirkung der Labyrinthe und des « Thalamus opticus » auf die Zugcurve des Frosches* (Pflüger's Arch., 1903, Bd. 99, pagg. 363-384).

alcune esperienze prendendo il tracciato dell'allungamento e del successivo accorciamento presentati da una zampa di rana, quando era sottoposta ad una temporanea trazione. La curva che in questo modo si ottiene, ha una forma caratteristica per la rana normale (*Zugcurve*), ed ha una forma diversa per la rana morta. Facendo la medesima esperienza sopra una rana slabirintata bilateralmente, si ottiene una curva simile a quella offerta dal cadavere, e non a quella data dalla rana normale vivente. Se la rana era stata operata da un solo lato, non si ottengono dalle due zampe due curve diverse fra loro e rispettivamente uguali alla curva normale e alla curva cadaverica; ma si ottengonó due curve intermedie fra l'uno e l'altro tipo. Secondo l'Emanuel, queste osservazioni si spiegano con la scomparsa del tono muscolare consecutiva alla lesione dei labirinti.

Le presenti ricerche furono da me eseguite con lo scopo di vedere quale influsso l'asportazione del labirinto eserciti sull'ergogramma della rana. La rana veniva fissata mediante lacci, in modo da essere tenuta immobile, sopra una tavoletta adattabile al miografo di Gad. Il muscolo gastrocnemio veniva isolato ed il suo tendine reciso e connesso con la leva isotonica del miografo, mentre il nervo sciatico, isolato, veniva a riposare sopra un elettrodo. Lo stimolo era dato da un eccitatore elettro-magnetico di Magnus-Blix, con un ritmo di 2 m″. Un certo numero di esperienze furono eseguite invece mettendo il gastrocnemio in rapporto con un collettore del lavoro di Fick (costruito dalla Cambridge Sc. Instr. C^{py}.) in modo da prendere in considerazione la quantità di lavoro compiuta dal muscolo.

La rana veniva operata secondo il metodo di Schrader (1), dalla bocca, dopo essere stata fissata sull'apparecchio indicato dal Trendelenburg (2); la distruzione del labirinto era mono- o bilaterale.

Le rane operate erano tenute in vasche di vetro, con acqua sempre pulita e cambiata frequentemente, e sopravvivevano assai a lungo, tanto che nessuna differenza ho potuto notare, sotto questo aspetto, con le rane normali.

Gli ergogrammi di una rana operata bilateralmente venivano confrontati con quello di una rana normale tenuta per un tempo uguale in uguali condizioni di ambiente.

Per ciò che riguarda la esauribilità del muscolo, la sua affaticabilità, la sua attitudine al lavoro, l'esame dell'ergogramma può offrirci un criterio di giudizio nei caratteri seguenti: *a*) l'altezza della contrazione; *b*) la lunghezza dell'ergogramma, ossia il numero di contrazioni che il muscolo può eseguire prima di esaurirsi; *c*) il grado di convergenza del profilo superiore

(1) Il metodo comunemente noto col nome dello Schrader (1887) dovrebbe piuttosto essere ascritto a M. Schiff, come egli stesso fa notare in una Nota: *Sur le rôle des rameaux non auditifs du nerf acoustique* (Rec. de Mém. Physiol., III, pagg. 121-141).

(2) W. Trendelenburg, *Ein Froschhalter für die Schradersche Labyrinthextirpation* (Zeitschr. f. biol. Technik u. Metod., 1908-09, I, pagg. 363-365).

dell'ergogramma verso l'ascissa; *d*) il grado medesimo di convergenza fino al punto in cui il muscolo entra in regime costante.

Poco peso ho dato al primo di questi caratteri, in quanto l'altezza della contrazione può variare anche per circostanze estranee che non si possono regolare con assoluta esattezza, come la tensione del filo che connette la leva al muscolo, ecc. Invece, l'esame comparativo degli altri caratteri mi è sembrato assai attendibile, particolarmente quello del grado di convergenza, ossia della velocità con cui diminuisce l'altezza in funzione del numero delle contrazioni.

Gli ergogrammi di rane diverse non si possono confrontare fra loro senza tener conto che il soggiorno in cattività può alterare, soprattutto per effetto del digiuno, lo stato di nutrizione e di funzionalità dei muscoli in questi animali. Le condizioni migliori si hanno confrontando un gruppo di rane normali ed un gruppo di rane operate, le quali siano state pescate e portate in laboratorio lo stesso giorno, e quivi tenute nelle stesse condizioni di ambiente.

Dato il risultato negativo di questa parte di osservazioni, credo inutile occupare troppo spazio nel riferire un grande numero di misure, e dirò brevemente che dal confronto degli ergogrammi di 30 rane operate di labirintoectomia bilaterale, con quelli di rane normali, non ho potuto rilevare che la distruzione del labirinto eserciti alcun influsso, sulla forza, sulla esauribilità e sulla affaticabilità del muscolo. L'esperienza sulle rane slabirintate fu eseguita a varia distanza di tempo — da uno a trenta giorni — dalla data dell'operazione.

Quando poi la distruzione del labirinto è stata monolaterale, confrontando gli ergogrammi dei due gastrocnemii è ancora più agevole riconoscere che non vi è differenza fra loro rispetto all'attitudine al lavoro.

Come unico esempio riferisco il seguente:

28 luglio. Rana $\frac{+}{\smile}$ operata, due giorni prima, di distruzione del labirinto a destra. L'ergogramma del gastrocnemio *destro* ha un'altezza iniziale di 15 mm., e misurandone l'altezza ad ogni 100 contrazioni, si hanno le seguenti altezze: 14, 13, 12, 10.5, 9.5, 8.

Quello del gastrocnemio sinistro ha un'altezza iniziale di 15 mm. e altezze successive, ad ogni 100 contrazioni, di 15, 14, 13, 11, 10, 9.5.

Dopo circa 600 contrazioni ambedue entrano in un regime costante, avendo presentato un decremento di $\frac{43,7}{100}$ dal lato sano e di $\frac{46,6}{100}$ dal lato operato, ossia del 7,28 % e del 7,76 % rispettivamente, per ogni 100 contrazioni.

Un particolare interessante offerto dall'ergogramma di rane slabirintate è invece quello di certe sinuosità del suo profilo inferiore che ricordano lontanamente, senza averne la regolarità, le oscillazioni del tono presentate dagli

atrii del cuore di anfibii. La figura 1 rappresenta un tratto dell'ergogramma del gastrocnemio destro di una rana, alla quale era stato, tre giorni prima, distrutto il labirinto destro.

Talvolta le oscillazioni del tono sono più irregolari, come si vede dalla fig. 2, che riproduce un tratto di ergogramma sinistro, di una rana operata di slabirintazione bilaterale da sei giorni. Allo scopo di determinare meglio le condizioni in cui si verifica questo fenomeno, ho distrutto il labirinto in un certo numero di rane, ed ho raccolto l'ergogramma a diversa distanza di tempo, e cioè, di giorno in giorno, fino a 75 giorni dopo l'operazione.

Fig. 1. — Rana operata a destra il 30 marzo. Ergogramma del gastrocnemio destro raccolto il 3 aprile. Sull'ascissa è marcato il tempo in secondi (ridotto a $\frac{1}{2}$).

La stessa ricerca fu eseguita parallelamente in rane operate da un solo lato e in rane operate bilateralmente. Riassunto brevemente, il risultato di queste esperienze è che le oscillazioni del tono non si presentano costantemente, ma solo in un periodo che va dal 3° al 7° giorno dopo l'operazione;

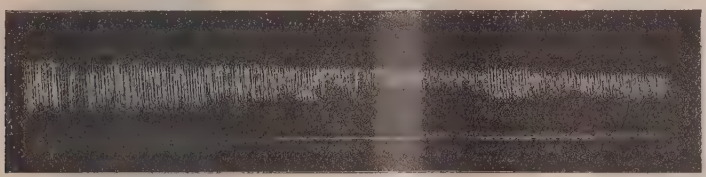


Fig. 2. — Rana slabirintata il 23 marzo. Ergogramma raccolto il 29 marzo. Sull'ascissa è marcato il tempo in secondi (ridotto a $\frac{1}{2}$).

che nelle rane operate da un lato si presentano nel muscolo dello stesso lato; che nelle rane operate bilateralmente si presentano in ambedue i lati. Le figure 3 e 4 mostrano gli ergogrammi destro e sinistro di una rana operata bilateralmente quattro giorni prima. L'ergogramma di sinistra, invece che presentare quella specie di *festonatura* che si vede negli altri tracciati, presenta nel profilo inferiore una curva a largo raggio (ondulazione), che dimostra, secondo me, un lento aumento, seguìto da una lenta diminuzione del tono.

Il primo quesito che si presenta davanti a questi fatti, è di sapere se essi rappresentino un fenomeno di deficienza ovvero uno di irritazione. La brevità imposta a questa Nota mi impedisce di fare una discussione dottrinale di questo punto, intorno al quale del resto molto si è già detto e scritto. Il fatto però che queste oscillazioni del tono si presentano solo durante un pe-

Fig. 3. — Rana operata di labirintectomia bilaterale 4 giorni prima. Gastrocnemio destro. Ergogramma che mostra oscillazioni del tono. Tempo in secondi (ridotto a $\frac{1}{2}$).

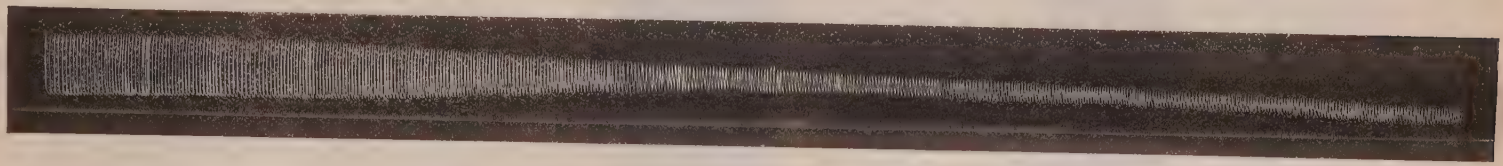


Fig. 4. — Ergogramma del gastrocnemio sinistro, della medesima rana (v. fig. 3). Si vede un'ampia ondulazione del tono sulla quale sono iscritte oscillazioni di ordine inferiore (ridotto a $\frac{1}{2}$).

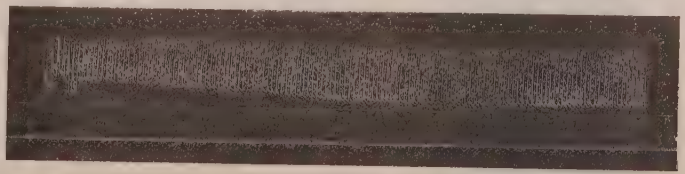


Fig. 5 α.

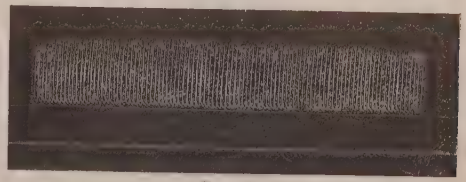


Fig. 5 β.

Fig. 5. — Rana operata a destra il 26 ottobre. Ergogramma raccolto il 29. Nella prima parte si vedono le oscillazioni del tono: Nella seconda parte si vede un tratto di ergogramma raccolto 30 m′, dopo la cocainizzazione della capsula uditiva: nessuna oscillazione del tono (ridotto a $\frac{1}{2}$).

riodo di tempo limitato e ristretto, ed in questo periodo *non sempre*, mi rese fin dalle prime osservazioni proclive ad interpretarle come un fenomeno irritativo.

Un criterio di giudizio positivo mi è stato offerto dalla cocainizzazione della capsula.

È noto dalle esperienze del Gaglio (1) sui piccioni che la cocainizzazione dei canali semicircolari determina effetti uguali al loro taglio od alla loro distruzione, ossia impetuosi e disordinati movimenti di oscillazione del capo e nistagno oculare; ciò che ha indotto giustamente il Gaglio a considerare i detti fenomeni come fenomeni di deficienza. Io feci alcune esperienze preliminari sulla rana, allo scopo di accertarmi che le osservazioni citate si applichino anche a questo animale. Eccone un esempio:

1° luglio. Ad una rana pratico per mezzo di un piccolo trapano a mano portante una piccolissima punta sferica da dentista, un'apertura nella parete della bolla acustica destra. L'animale, sciolto dai lacci, si dimostra perfettamente normale. Introduco nella bolla acustica per mezzo di una sottile pipetta di vetro un paio di goccie di una soluzione di cloridrato di cocaina all' 1 %. Dopo 10 m'. la rana mostra la posizione caratteristica delle rane slabirintate a destra: estensione e abduzione degli arti di sinistra; facilità quando spicca un salto di cadere sul dorso, ecc. ecc. Dopo un'ora questi fenomeni sono attenuati. L'indomani (2 luglio) la rana non si distingue più in nulla da una normale.

Ciò posto, se le oscillazioni del tono rappresentano un fenomeno di deficienza, la cocainizzazione della bolla acustica vuota non deve modificarle. Se invece esse rappresentano un fenomeno di irritazione, saranno probabilmente abolite dalla cocaina, introdotta nella bolla acustica; ammettendo che quivi essa vada ad anestetizzare il moncone nervoso, che noi supponiamo essere in istato irritativo. Ecco il protocollo di due esperienze di questo tipo:

29 ottobre 1910. Rana ♀ slabirintatata a destra il 26 ottobre. Ore 10. Si comincia a prendere l'ergogramma del gastrocnemio destro. Notevoli oscillazioni del tono.

Ore 10.5'. Introduzione di qualche goccia di cocaina nella bolla acustica.

Ore 10.20'-10.30'. Si raccoglie nuovamente l'ergogramma che non presenta alcuna oscillazione del tono.

Ore 17. Si raccoglie un altro tratto di ergogramma, per vedere se l'azione della cocaina è cessata: qualche lieve oscillazione di tono.

17 dicembre. Rana ♂ operata a destra, dal 13 dicembre. Ergogramma del gastrocnemio destro. Evidenti oscillazioni del tono.

Interrompo l'ergogramma ed applico cocaina.

(1) G. Gaglio, *Esperienze sulla anestesia dei canali semicircolari dell'orecchio* (Archivio per le Sc. Med., 1899, XXIII, pp. 41-64).

Dopo cinque minuti raccolgo l'ergogramma, che presenta ancora oscillazioni del tono (la cocaina non ha ancora agito).

Dopo 15 minuti, nuovo ergogramma: le oscillazioni del tono sono scomparse.

Dopo 30 m'., nuovo ergogramma. Nessuna oscillazione del tono.

La fig. 5 α e β illustra un'altra di queste esperienze.

Conclusioni.

1) La distruzione del labirinto nella rana determina, oltre i noti fenomeni di deficienza, fatti transitorii di natura irritativa.

2) Questi fatti consistono in oscillazioni del tono di muscoli scheletrici (gastrocnemio), e sono *omolaterali* quando il labirinto è distrutto da un sol lato, *bilaterali* se è distrutto da ambidue.

3) La cocaina, applicata localmente, abolisce le oscillazioni del tono di origine labirintica.

Patologia. — *Sulla leishmaniosi e sul suo modo di trasmissione* (1). Nota IV preliminare del dott. Carlo Basile, presentata dal Socio B. Grassi.

Nelle mie precedenti Note (2) sull'argomento, ho potuto dimostrare l'esistenza di due forme della leishmaniosi del cane: la grave (a decorso acuto), la attenuata (a decorso cronico). La prima forma è stata già da me segnalata nei giovani cani di Bordonaro (Messina): oggi riferisco, che essa esiste anche nei giovani cani di Roma, nella qual città, mi era due anni fa sfuggita, perchè avevo eseguito le ricerche al canile municipale, dove vengono portati, in massima parte, cani di età media o avanzata, vaganti per le vie.

Riferisco, come esempio, il seguente caso: un cane di qualche mese di età, magro e tremante, fu comprato alle porte di Roma, ove era nato e cresciuto. Un primo esame del midollo riuscì negativo per le leishmanie; il dimagramento, il tremore si accentuavano però sempre più, mentre la temperatura era affatto irregolare. Ripetuto l'esame del midollo fu notata la presenza dei corpi di Leishman, i quali però si presentarono molto più numerosi nel sangue aspirato dal fegato, mediante puntura. Dopo circa due

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma, diretto dal prof. B. Grassi.

(2) Basile Carlo, Rend. Acc. Lincei, vol. XIX, serie 5ª, Sem. I, fasc. 3, Sem. II, fasc. 10, anno 1910.

mesi (primi di febbraio) il cane venne a morte e nella milza, nel fegato, nel midollo osseo, ho notato la presenza dei parassiti.

Sia dal punto di vista etiologico, adunque, sia dal punto di vista clinico, la leishmaniosi dei cani di Roma è perfettamente identica a quella dei cani di Bordonaro; da notizie recentemente raccolte, credo di non errare nel supporre, per ora, che essa esista in molti paesi del circondario di Roma.

D'altro canto l'esistenza del Kala-Azar a Roma da me e Fulci (1) per primi, segnalata, realizzando la mia ipotesi precedentemente espressa (2), mi offre occasione a qualche nuova considerazione.

I recenti studî sulle leishmaniosi hanno accertato che, almeno nelle regioni mediterranee, la leishmaniosi umana e la canina, sono identiche non solo per i caratteri morfologici e biologici del parassita, ma anche per il loro decorso clinico, e per la loro distribuzione geografica; si aggiunga a ciò che il cane, a preferenza di tanti altri animali, è suscettibile (almeno nei nostri paesi) dell'infezione sperimentale da parte del virus umano (3). Anche dal punto di vista terapeutico, poi, per quanto a me pare, non risulta differenza alcuna. In fatti, ripetendo qui succintamente quanto ho comunicato al XX Congresso di Medicina Interna (4), in data del 22 dicembre 1910, la leishmania che determina l'infezione nel cane, resiste all'azione della comune dose massima terapeutica (per l'uomo) di 606 (1 cgr. per kgr. di animale), così come sembra che resista il parassita del Kala-Azar (5).

Il modo di trasmissione della leishmaniosi, almeno per quanto riguarda le nostre regioni, è stato oggetto di miei lunghi studii.

Sin dal maggio 1910 ho potuto notare, a Bordonaro, in alcune pulci *serraticeps*, tolte a giovani cani agonizzanti per leishmaniosi a decorso acuto,

(1) Fulci e Basile, Rend. Acc. Lincei, vol. XX, seduta del 22 gennaio 1911. Questo caso di Kala-Azar è stato osservato in un giovane diciannovenne di Castelnuovo di Porto (Roma). Nella seduta del 29 gennaio 1911 della Reale Accademia Medica di Roma il prof. Concetti ha riferito su un nuovo caso di Kala-Azar, il primo osservato nei bambini a Roma.

(2) Dopo aver segnalato l'esistenza della leishmaniosi nei cani di Roma, ho avanzato l'ipotesi che casi di Kala-Azar dovessero esistere in questa città.

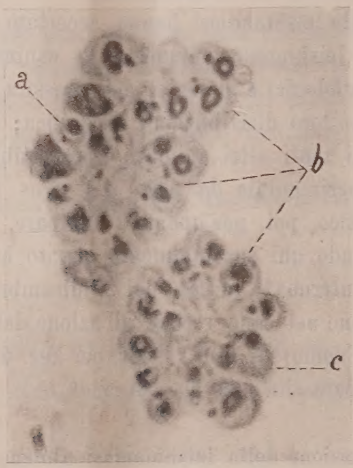
(3) È ovvio che l'esperimento inverso, dal cane all'uomo, non deve farsi.

(4) Nel novembre 1910 ho eseguito nell'Istituto di Patologia Medica, della R. Università di Catania, diretto dal prof. M. Ascoli, alcuni esperimenti sull'azione terapeutica del 606 nelle Leishmaniosi, che ho dettagliatamente riferito al XX Congr. di Med. Int.

(5) Il Nicolle ha ottenuto, in un cane affetto da leishmaniosi sperimentale, scomparsa dei parassiti dal fegato, dopo quattro giorni dall'iniezione di 606, nella dose di 2 cgr. per kgr. di animale: questa dose però, ripeto, ai sensi della terapia umana, è tossica. Del resto, come io ho comunicato al XX Congr. di Medic. Int., nessun fatto, per ora, si oppone a ritenere, che la leishmaniosi (spontanea o naturale) del cane, possa guarire con una dose di 606 superiore ad 1 cgr. per kgr. di animale.

la presenza di leishmanie. Nel dicembre 1910 (1), seguendo la via sperimentale, ho potuto riprodurre, mediante pulci *serraticeps*, la leishmaniosi in un giovane cane, ed ho potuto anche dimostrare che le leishmanie si moltiplicano attivamente nella pulce *serraticeps*.

Io ho potuto ottenere dei preparati in cui i detti parassiti sono numerosissimi, alcuni nello stadio preflagellato, in via di divisione longitudinale, altri nello stadio flagellato. Le disposizioni a rosetta sono piuttosto frequenti.



Leishmanie nella Pulce Serraticeps.
(Ingrandim. microfotografico 2.000 diametri)

Il parassita *a* è perfettamente identico a quelli che riscontransi nell'uomo e nel cane; i parassiti *b*, disposti a rosette, sono in via di evoluzione; fra essi il parassita *c* è in divisione longitudinale.

Oggi, a nuova conferma, che la pulce *serraticeps* è il veicolo di trasmissione della leishmania (almeno nelle regioni Mediterranee), stanno miei nuovi esperimenti eseguiti seguendo la via naturale, qui riassunti.

Due cani neonati da circa 30 giorni ed una cagna di 2 anni, nei quali tutti, l'esame del midollo era stato negativo per le leishmanie, furono tenuti, per qualche tempo, in un canile ripetutamente lavato con soluzioni di creolina e quindi posti in altro canile ben protetto da fitte reti metalliche, ove si ebbe cura che la temperatura fosse attorno ai 20° C. Dopo qualche giorno assieme ad essi fu posto un cane, di età avanzata, affetto da leishmaniosi. Le pulci di questo cane, che erano numerose, non tardarono a passare in parte sui cani in esperimento. Dopo 30 giorni eseguita, in questi, la pun-

(1) Basile Carlo, Rend. Acc. Lincei, vol. XX, seduta 8 gennaio 1911.

tura del fegato, ho potuto mettere in evidenza, nel sangue epatico, le forme di Leishman. I due cani giovani andarono dimagrendo, ed uno di essi al 45° giorno, dall'inizio dell'esperimento, morì in uno stato comatoso: i preparati per strisciamento di fegato, milza, midollo, presentarono leishmanie, in varia quantità, nei varî organi, ed in varî stadî di evoluzione. Gli altri cani vivono tuttora.

Debbo far noto, che ho tenuto dei cani di controllo, in cui ripetute punture di fegato sono riuscite negative.

Ho in corso altri esperimenti, sui quali mi tratterrò in altra pubblicazione.

Per ora accenno che, nelle mie recenti ricerche a Bordonaro, ho potuto notare la presenza di pulci *serraticeps* nelle coltri e nelle materassa di alcune di quelle famiglie che hanno l'abitudine di tenere cani in casa; dell'esame di gran parte di queste pulci mi occuperò in seguito.

La trasmissione del Kala-Azar mediante la pulce *serraticeps* e verosimilmente mediante la pulce *irritans* è stata, dal mio maestro prof. Grassi, annunciata, a mio nome, all'Accademia dei Lincei sin dal 6 novembre 1910 [1]. Circa due mesi dopo, il 13 gennaio 1911 [2], Sangiorgi, assistente del Pagliani, ha riferito all'Accademia di Medicina in Torino alcune sue ricerche sullo stesso argomento, che egli ha pubblicate in Pathologica, in data del 15 gennaio 1911, dopo che io aveva già presentato all'Accademia dei Lincei, in data dell'8 gennaio, una seconda Nota sulla trasmissione delle leishmanie mediante le pulci *serraticeps*. Tolgo intanto, dalla pubblicazione del Sangiorgi, che le sue ricerche sulle cimici, a conferma delle mie, sono state negative per le leishmanie; onde l'autore vorrebbe piuttosto accarezzare l'ipotesi, di cui spetta a me la priorità, « *che la pulce serraticeps sia il probabile ospite intermedio della Leishmania dal cane al bambino* » dal fatto che « *da un discreto numero di pulci raccolte, (dopo l'ottobre 1910), su alcuni cani randagi accalappiati a Catania e subito speditegli a Torino, ne ha prelevato una dozzina fra quelle che non mostravano alcun segno di vita,* **ed in un solo preparato** [3] *allestito con i loro corpi disfatti insieme in un po' di soluzione fisiologica, ha potuto mettere in evidenza un numero grande, davvero impressionante di protozoi, rassomigliantissimi alle forme di Leishmania* ».

(1) Quella mia Nota (*Sulla leishmaniosi del cane e sull'ospite intermedio del Kala-Azar infantile*) è stata pubblicata nel fascicolo del 20 novembre 1910 della R. Acc. dei Lincei, essendomi io dovuto trattenere a Catania, nei primi di novembre, per alcuni esperimenti sul 606 iniziati in quella città nell'Istituto di Patologia Medica.

(2) Vedi Policlinico, Sezione Pratica, fasc. 7, anno 1911.

(3) Nel testo queste parole sono scritte in carattere comune.

Chi conosce le ricerche del Patton, del Porter, del Mackinnon, dello Chatton, del Leger, e di tanti altri illustri studiosi dei protozoi parassiti degli insetti, chi confronta la mia microfotografia, ottenuta da uno dei miei preparati di Leishmanie nel *pulex serraticeps*, colla microfotografia data dal Sangiorgi, e tien conto delle condizioni, nelle quali questi (1) s'è posto, deve ritenere, per molte ragioni, almeno prematura, per ora, l'identità dei protozoi descritti dal Sangiorgi, alle forme di Leishman.

CORRISPONDENZA

Il Presidente Blaserna presenta un piego suggellato inviato dal prof. Nozari, del R. Ist. Tecnico di Ravenna, perchè sia conservato negli archivi accademici.

E. M.

(1) Il Sangiorgi, fra l'altro, rende noto che non ha «potuto sapere notizie delle condizioni degli animali ospiti degli insetti raccolti».